

TENTAMEN I VEKTORANALYS
SI1146 Vektoranalys, HT2024

Torsdagen den 19 december 2024, kl 08.00 – 13.00

Anteckna på varje blad: Namn, utbildningslinje, årskurs och problemnummer.
Tillåtna hjälpmedel: Formelblad som delas ut (ingen räknedosa).

Examinator: Edwin Langmann (Epost: langmann@kth.se)

Bonuspoängen från HT2024 adderas till tentauppgift 1, dock max 6 poäng totalt.

Lösningar: Kommer att finnas på kurshemsidan.

Poäng: Varje uppgift kan ge 6 poäng.

Motivera utförligt! Otillräckliga motiveringar kan medföra poängavdrag.

Notation: (i) (x, y, z) är kartesiska koordinater, och $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ är Ortsvektorn. (ii) (ρ, φ, z) är cylinderkoordinater så att $x = \rho \cos(\varphi)$, $y = \rho \sin(\varphi)$. (iii) (r, θ, φ) är sfäriska koordinater så att $x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$, $y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$, $z = r \cos(\theta)$. (iv) $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ är Laplace operatoren. (v) t är tiden, och $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

1. (a) Visa att

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = c_1 \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) + c_2 \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})$$

med konstanter c_1, c_2 som du skall beräkna ($\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är deriverbara vektorfält i tre dimensioner). (3p).

(b) Beräkna $\Delta(r^{-4}\mathbf{e}_r)$. Ledning: Kom ihåg att $\Delta\mathbf{u} = \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u}$ för ett vektorfält $\mathbf{u}$ i tre dimensioner, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, och $\mathbf{e}_r = (x, y, z)/r$. (3p)

2. (a) Visa att

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = c_1(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + c_2\nabla(\mathbf{u}^2)$$

med konstanter c_1, c_2 som du skall beräkna ($\mathbf{u}$ är ett deriverbart vektorfält i tre dimensioner). (3p)

(b) Beräkna $\text{rot}(r^n\mathbf{e}_\varphi)$ där $n > 0$ är en konstant. (3p)

3. (a) Beräkna $\epsilon_{ijk}\epsilon_{kjl}$, där ϵ_{ijk} är komponenterna av epsilon tensorn i tre dimensioner. (2p)

(b) A_i är komponenter av ett vektorfält i ett kartesiskt koordinatsystem i $\mathbb{R}^3$ ($i = 1, 2, 3$). Visa att $T_{ij} = \partial_i A_j$ definierar ett tensorfält av rang 2 ($\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$). (2p)

(c) Transformera vektorfältet $\mathbf{u} = (x, y, 0)$ till sfäriska koordinater! (2p)

Ledning:

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. (a) Beräkna linjeintegralen $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{A} = (2y, -2x, 0)/(x^2 + y^2)$ och C är randen till ellipsen $x^2 + 2y^2 \leq a^2$ i xy -planet $z = 0$, där $a > 0$ är en konstant och tangenträkningen i punkten $\mathbf{r} = (a, 0, 0)$ är $(0, 1, 0)$. *Ledning:* $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ i området $x^2 + y^2 > 0$. (2p)

(b) Låt V vara ett volymen i tre dimensioner med randen ∂V (dvs., $V \subset \mathbb{R}^3$, och ∂V är V :s randyta), ϕ ett skalärfält som är deriverbart inom V och lika med konstanten $\phi_0 > 0$ på ∂V , och $\mathbf{A}$ ett vektorfält som uppfyller $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{c}$ inom V , där $\mathbf{c}$ är en konstant vektor. Visa att

$$\int_V \nabla \phi \times \mathbf{A} dV = c_1 \oint_{\partial V} \mathbf{A} \times d\mathbf{S} + c_2 \mathbf{c} \int_V \phi dV$$

med konstanter c_1, c_2 som du skall beräkna ($d\mathbf{S}$ är ytintegrationselementet på ∂V). (4p)

5. Beräkna den elektriska potentialen ϕ inom det laddningsfria området $R \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2R$, $z \in \mathbb{R}$ om potentialen ϕ vid randytan $\sqrt{x^2 + y^2} = R$, $z \in \mathbb{R}$ är konstant och lika med $\phi_0 > 0$, och randvillkoret vid randytan $\sqrt{x^2 + y^2} = 2R$, $z \in \mathbb{R}$ är $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = c\phi$, där $\mathbf{E}$ är elektriska fältet, $\mathbf{n}$ är normalriktningen till randytan, och $c > 0$ och $R > 0$ är konstanter. *Ledning:* ϕ beror bara på $\sqrt{x^2 + y^2}$, och följande ekvationer är uppfyllda inom området, $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ och $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Inför själv lämpliga koordinater! (6p)

6. Den stationära temperaturen T , som enbart beror på

$$u = \sqrt{r + z} = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z},$$

satisfierar Laplaces ekvation $\Delta T = 0$ samt randvillkoren $T = T_0 \geq 0$ vid $u = u_0 > 0$ och $T = T_1 > T_0$ vid $u = 2u_0$. Använd koordinaterna (u, v, φ) definierade genom

$$x = uv \cos(\varphi), \quad y = uv \sin(\varphi), \quad z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2),$$

$u \geq 0$, $v \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, för att beräkna $T = T(u)$, $u_0 < u < 2u_0$ ($u_0 > 0$, T_0 och T_1 är konstanter). Börja med att visa att koordinaterna (u, v, φ) är ortogonala, och beräkna skalfaktorerna h_u, h_v, h_φ . (6p)

LYCKA TILL!

Lösningsföreläsning tentamen SI1146, 19 december 2024

NOTE: I typed this in quickly: please let me know by email if you find a mistake.

1. (a)

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \partial_i \epsilon_{ijk} u_j v_k = \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{\epsilon_{kij}} v_k \partial_i u_j + \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{-\epsilon_{jik}} u_j \partial_i v_k = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}),$$

i.e., $c_1 = -1$, $c_2 = 1$.

(b)

$$\operatorname{div}(r^{-4} \mathbf{e}_r) = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \partial_r (h_\theta h_\varphi r^{-4}) = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_r (r^{-2} \sin(\theta)) = -2r^{-5},$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div}(r^{-4} \mathbf{e}_r) = \operatorname{grad}(-2r^{-5}) = \frac{1}{h_r} \mathbf{e}_r \partial_r (-2r^{-5}) = 10r^{-6} \mathbf{e}_r,$$

$$\operatorname{rot}(r^{-4} \mathbf{e}_r) = \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \begin{vmatrix} h_r \mathbf{e}_r & h_\theta \mathbf{e}_\theta & h_\varphi \mathbf{e}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ h_r r^{-4} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r \mathbf{e}_\theta & r \sin(\theta) \mathbf{e}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ r^{-4} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

ger

$$\Delta(\mathbf{e}_r r^{-4}) = 10r^{-6} \mathbf{e}_r.$$

2. (a)

$$\begin{aligned} [\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})]_i &= \epsilon_{ijk} u_j \epsilon_{klm} \partial_l u_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) u_j \partial_l u_m \\ &= \underbrace{u_j \partial_i u_j}_{\frac{1}{2} \partial_i (u_j u_j)} - u_j \partial_j u_i = [\frac{1}{2} \nabla(\mathbf{u}^2) - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_i \end{aligned}$$

ger $c_1 = -1$, $c_2 = \frac{1}{2}$.

(b)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(r^n \mathbf{e}_\varphi) &= \frac{1}{h_r h_\theta h_\varphi} \begin{vmatrix} h_r \mathbf{e}_r & h_\theta \mathbf{e}_\theta & h_\varphi \mathbf{e}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ 0 & 0 & h_\varphi r^n \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r \mathbf{e}_\theta & r \sin(\theta) \mathbf{e}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ 0 & 0 & r^{n+1} \sin(\theta) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} (\mathbf{e}_r \partial_\theta (r^{n+1} \sin(\theta)) - r \mathbf{e}_\theta \partial_r (r^{n+1} \sin(\theta))) = \mathbf{e}_r r^{n-1} \cot(\theta) - \mathbf{e}_\theta (n+1) r^{n-1}. \end{aligned}$$

3. (a)

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{kjl} = \delta_{ij} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jj} = \delta_{il} - 3\delta_{il} = -2\delta_{il}.$$

(b) A_i är komponenter av ett vektorfält, det betyder att under en koordinattransformion

$$x_i \rightarrow x'_i = L_{ij} x_j + a_i,$$

där $L = (L_{ij})_{i,j=1}^3$ är en rotationsmatris och $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ är en konstant vektor, uppfylls

$$A_i \rightarrow A'_i = L_{ij}A_j.$$

Detta ger transformationsregeln

$$\begin{aligned} T_{ij} = \partial_i A_j \rightarrow T'_{ij} = \partial'_i A'_j &= \frac{\partial}{\partial x'_i} (L_{jk} A_k) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} (L_{jk} A_k)}_{L_{jk} \partial_l A_k} \underbrace{\frac{\partial x_l}{\partial x'_i}}_{(L^{-1})_{li} = L_{il}} \\ &= L_{il} L_{jk} \partial_l A_k = L_{il} L_{jk} T_{lk}, \end{aligned}$$

som är transformationsregeln för en tensor av rang 2 ($L^{-1} = ((L^{-1})_{ij})_{i,j=1}^3$ är matrisen som är invers till rotationsmatrisen $L = (L_{ij})_{i,j=1}^3$).

(c) $\mathbf{u} = (x, y, 0) = (r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), 0)$ ger

$$u_r = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{u} = r \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) + r \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi) = r \sin^2(\theta),$$

$$u_\theta = \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{u} = r \sin(\theta) \cos(\theta) \cos^2(\varphi) + r \sin(\theta) \cos(\theta) \sin^2(\varphi) = r \sin(\theta) \cos(\theta),$$

$$u_\varphi = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Svar: $\mathbf{u} = \mathbf{e}_r u_r + \mathbf{e}_\theta u_\theta = r \sin(\theta) [\sin(\theta) \mathbf{e}_r + \cos(\theta) \mathbf{e}_\theta]$.

[Check: $(x, y, 0) = \rho \mathbf{e}_\rho$, som är OK därför att $r \sin(\theta) = \rho$ och

$$\sin(\theta) \mathbf{e}_r + \cos(\theta) \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\rho.$$

]

4. (a) $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ för $\rho > 0$ ger

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{S_\epsilon} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

där S_ϵ är cirkeln $x^2 + y^2 = \epsilon^2$ med radie $\epsilon > 0$ i xy -planet $z = 0$ (vi kan inte använda Stokes sats direkt pga att vektorfältet är singulärt i z -axeln, men Stokes sats kan användas för att visa att integrationsvägen kan deformeras från C till S_ϵ utan att ändra integralen — detaljerna diskuteras under kursens gång, och uppgiften är en teorifråga som testar denna kunskap).

Cirkeln S_ϵ kan parametriseras med $\mathbf{r}(s) = (\epsilon \cos(s), \epsilon \sin(s), 0)$ där $0 \leq s \leq 2\pi$, som ger

$$\begin{aligned} \oint_{S_\epsilon} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{A}(\mathbf{r}(s)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} ds \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(2\epsilon \sin(s), -2\epsilon \cos(s), 0)}{\epsilon^2} \cdot (-\epsilon \sin(s), \epsilon \cos(s), 0) ds = -2 \cdot 2\pi = -4\pi. \end{aligned}$$

Svar: -4π . Anmärkning: Svaret 0 ger 0 poäng.

(b) Indexräkning, produktregeln, och Gauss universalsats ger

$$\begin{aligned} \left[\int_V \nabla \phi \times \mathbf{A} dV \right]_i &= \int_V \epsilon_{ijk} (\partial_j \phi) A_k dV = \int_V \epsilon_{ijk} [\partial_j (\phi A_k) - \phi \partial_j A_k] dV \\ &= \oint_{\partial V} \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{-\epsilon_{ikj}} \underbrace{\phi}_{\phi_0} A_k dS_j - \int_V \phi \underbrace{[\nabla \times \mathbf{A}]_i}_{c_i} dV = -\phi_0 \int_{\partial V} [\mathbf{A} \times d\mathbf{S}]_i - c_i \int_V \phi dV, \end{aligned}$$

som ger

$$\int_V \nabla \phi \times \mathbf{A} dV = -\phi_0 \int_{\partial V} \mathbf{A} \times d\mathbf{S} - \mathbf{c} \int_V \phi dV,$$

dvs., $c_1 = -\phi_0$ och $c_2 = -1$.

5. Potentialen uppfyller $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\Delta \phi = 0$ med randvillkoren (OBS att $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\rho$)

$$\phi|_{\rho=R} = \phi_0, \quad [\mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{E} - c\phi]_{\rho=2R} = [-\mathbf{e}_\rho \cdot \nabla \phi - c\phi]_{\rho=2R} = [-\partial_\rho \phi - c\phi]_{\rho=2R} = 0,$$

där $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ och $\mathbf{e}_\rho = (x, y, 0)/\rho$. Ledningen ger $\phi = \phi(\rho)$. Detta ger

$$-\Delta \phi = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho \phi(\rho)) = 0$$

och

$$\phi(R) = \phi_0, \quad -\phi'(2R) - c\phi(2R) = 0.$$

Allmänna lösningen till ODEn är $\phi(\rho) = c_1 + c_2 \ln(\rho/R)$ med integrationskonstanter c_1 och c_2 . Randvillkoren ger

$$\phi(R) = c_1 = \phi_0, \quad -\phi'(2R) - c\phi(2R) = -c_2/(2R) - c[\phi_0 + c_2 \ln(2)] = 0,$$

som ger $c_2 = -\frac{c\phi_0}{1/2R + c \ln(2)} = -\frac{2Rc}{1 + 2Rc \ln(2)} \phi_0$. Svar:

$$\phi(\rho) = \phi_0 - \frac{2Rc}{1 + 2Rc \ln(2)} \phi_0 \ln(\rho/R).$$

6.

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} uv \cos(\varphi) \\ uv \sin(\varphi) \\ \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{pmatrix}$$

ger

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} v \cos(\varphi) \\ v \sin(\varphi) \\ u \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} u \cos(\varphi) \\ u \sin(\varphi) \\ -v \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -uv \sin(\varphi) \\ uv \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix},$$

som ger

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = 0$$

och

$$h_u = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right| = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_v = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad h_\varphi = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right| = uv.$$

Detta visar att koordinaterna är ortogonala och ger skalfaktorerna. $T = T(u)$ ger

$$\Delta T = \frac{1}{h_u h_v h_\varphi} \partial_u (h_v h_\varphi \partial_u T(u) / h_u) = \frac{1}{uv(u^2 + v^2)} \partial_u (uv \partial_u T(u)),$$

som ger Laplaces ekvation

$$\frac{1}{u} \partial_u (u \partial_u T(u)) = 0,$$

lika med Laplaces ekvation i polära koordinater för funktioner som bara beror på ρ (man kan se det med variabelbytet $u \rightarrow \rho$). Allmänna lösningen är

$$T(u) = c_1 + c_2 \ln(u/u_0)$$

med integrationskonstanter c_1 och c_2 . Randvillkoren ger $c_1 = T_0$ och $c_1 + c_2 \ln(2) = T_1$.

Svar: $T(u) = T_0 + (T_1 - T_0) \ln(u/u_0) / \ln(2)$.