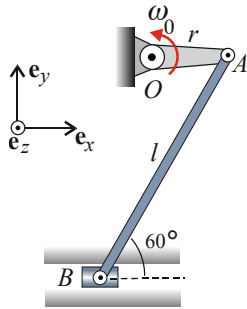


1)



1) Betrakta OA:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \omega_0 \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_{OA} = \omega_0 \mathbf{e}_z \times r \mathbf{e}_x = r \omega_0 \mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \alpha_0 \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_{OA} - \omega_0^2 \mathbf{r}_{OA} = -\omega_0^2 l \mathbf{e}_x$$

2) Betrakta AB:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega_1 \times \mathbf{r}_{AB} = r \omega_0 \mathbf{e}_y - \omega_1 \mathbf{e}_z \times \frac{l}{2} (\mathbf{e}_x + \sqrt{3} \mathbf{e}_y) =$$

$$= \frac{\sqrt{3} l \omega_1}{2} \mathbf{e}_x + \left( r \omega_0 - \frac{l \omega_1}{2} \right) \mathbf{e}_y = v_B \mathbf{e}_x \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_x: v_B = \frac{\sqrt{3} l \omega_1}{2} \\ \mathbf{e}_y: r \omega_0 = \frac{l \omega_1}{2} \Rightarrow \omega_1 = \frac{2r}{l} \omega_0 \end{cases}$$

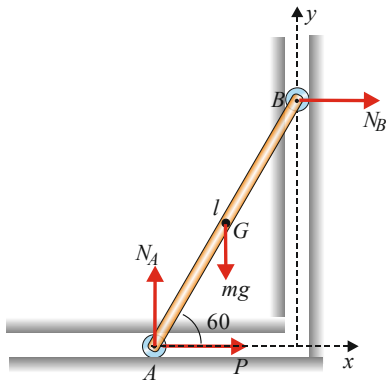
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha_1 \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_{AB} - \omega_1^2 \mathbf{r}_{AB} = -r \omega_0^2 \mathbf{e}_x - \alpha_1 \mathbf{e}_z \times \frac{l}{2} (\mathbf{e}_x + \sqrt{3} \mathbf{e}_y) + \omega_1^2 \frac{l}{2} (\mathbf{e}_x + \sqrt{3} \mathbf{e}_y) =$$

$$= \left( \frac{\sqrt{3} l \alpha_1}{2} - r \omega_0^2 + \frac{l \omega_1^2}{2} \right) \mathbf{e}_x + \left( \frac{\sqrt{3} l \omega_1^2}{2} - \frac{l \alpha_1}{2} \right) \mathbf{e}_y = a_{Bx} \mathbf{e}_x \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_x: a_{Bx} = \frac{\sqrt{3} l \alpha_1}{2} - r \omega_0^2 + \frac{l \omega_1^2}{2} \\ \mathbf{e}_y: \frac{\sqrt{3} l \omega_1^2}{2} = \frac{l \alpha_1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = \sqrt{3} \omega_1^2 \end{cases}$$

Insättning av  $\omega_1$  och  $\alpha_1$  ger slutligen

$$a_{Bx} = \frac{\sqrt{3} l \alpha_1}{2} - r \omega_0^2 + \frac{l \omega_1^2}{2} = \frac{2 l \omega_1^2}{\sqrt{2}} - r \omega_0^2 = 2 l \omega_1^2 - r \omega_0^2 = \left( 2 l \frac{4 r^2}{l^2} - r \right) \omega_0^2 = \left( \frac{8 r}{l} - 1 \right) r \omega_0^2$$

2)



1) Formulera kraft- och momentekvationerna för balken

$$\mathbf{e}_x: m a_{Gx} = N_B + P \quad (1)$$

$$\mathbf{e}_y: m a_{Gy} = N_A - mg \quad (2)$$

$$\curvearrowleft G: \frac{1}{12} m l^2 \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} P l - \frac{1}{4} N_A l - \frac{\sqrt{3}}{4} N_B l \quad (3)$$

Momentekvationen ger

$$m l \alpha = 3 \left( \sqrt{3} P - N_A - \sqrt{3} N_B \right) \quad (4)$$

2) Kinematiken ger

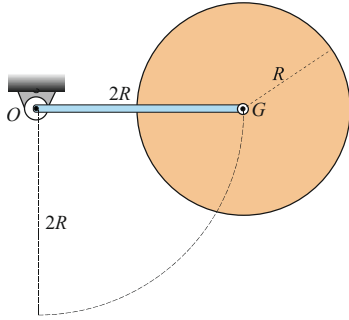
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{a}_A + \alpha \mathbf{e}_z \times \frac{l}{2} (\mathbf{e}_x + \sqrt{3} \mathbf{e}_y) \text{ eller}$$

$$a_B \mathbf{e}_y = a_A \mathbf{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2} l \alpha \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} l \alpha \mathbf{e}_y \Rightarrow \mathbf{e}_x: a_A = \frac{\sqrt{3}}{2} l \alpha; \quad \mathbf{e}_y: a_B = \frac{1}{2} l \alpha$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \alpha \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_{AG} = \frac{\sqrt{3}}{2} l \alpha \mathbf{e}_x + \alpha \mathbf{e}_z \times \frac{l}{4} (\mathbf{e}_x + \sqrt{3} \mathbf{e}_y) = \frac{\sqrt{3}}{4} l \alpha \mathbf{e}_x + \frac{1}{4} l \alpha \mathbf{e}_y \quad (5)$$

3) Insättning av (5) i (1) och (2) ger:  $N_B = \frac{\sqrt{3}}{4}ml\alpha - P$  och  $N_A = mg + \frac{1}{4}ml\alpha$  vilket insatt i (4) resulterar i  $ml\alpha = 3\left(\sqrt{3}P - mg - \frac{1}{4}ml\alpha - \frac{3}{4}ml\alpha + \sqrt{3}P\right) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{3\sqrt{3}P}{2ml} - \frac{3g}{4l}}}$

3)



1) Betrakta första fallet. Skivan är fri att rotera kring G, dvs kraftmomentet från stängen på skivan  $M_G = 0$ .

Momentekvationen för skivan ger  $H'_G = \text{konst}$  eller dess vinkelhastighet är konstant. Eftersom skivans vinkelhastighet är noll från början kommer den att förbli noll under rörelsen. Skivan roterar inte utan har en translatorisk rörelse. Använd energiekvationen för skivan  $T + V = E = \text{konst} \Rightarrow T_0 + V_0 = T_1 + V_1$

$$\text{Vi har } T_0 = 0, V_0 = 0, T_1 = \frac{1}{2}mv_{G1}^2 + \underbrace{T'_1}_0 = \frac{1}{2}mv_{G1}^2$$

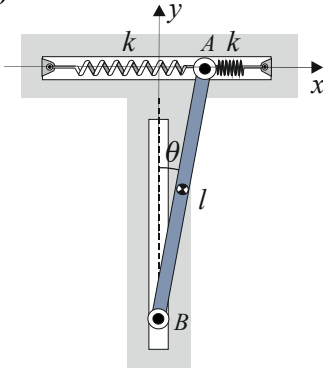
eftersom skivan inte roterar,  $V_1 = -2mgR$ . Vilket ger  $\underline{\underline{v_{G1} = 2\sqrt{gR}}}$

2) Betrakta nu det andra fallet då skivan är låst till stängen. Hela systemet roterar då som en stel kropp kring O. Vi kan igen använda energiekvationen,  $T_0 + V_0 = T_2 + V_2$  där  $T_2 = \frac{1}{2}I_O\omega_2^2$  och

$V_2 = -2mgR$ .  $I_O$  är skivans tröghetsmoment kring O,  $I_O = I_G + 4mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + 4mR^2 = \frac{9}{2}mR^2$ .

$$\text{Detta ger: } \frac{9}{4}mR^2\omega_2^2 = 2mgR \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{8g}{9R}} \Rightarrow \underline{\underline{v_{G2} = 2R\omega_2 = \frac{4}{3}\sqrt{2gR} < v_{G1}}}$$

4)



1) Använd  $\theta$  som generaliserad koordinat och bestäm  $v_G$

$$\begin{cases} x_G = \frac{l}{2}\sin\theta \\ y_G = -\frac{l}{2}\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_G = \frac{1}{2}l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_G = \frac{1}{2}l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow v_G^2 = \frac{1}{4}l^2\dot{\theta}^2$$

2) Bestäm  $L = T - V$

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{4}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$V = 2\frac{1}{2}kx_A^2 + mgy_G = kl^2\sin^2\theta - \frac{1}{2}mgl\cos\theta \Rightarrow L = T - V = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 - kl^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

3) Lagranges ekvation:

$$\theta: \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + 2kl^2\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}mgl\sin\theta = 0$$

Lineariserad ekvation för små svängningar:

$$\theta: \ddot{\theta} + \underbrace{\left(\frac{6k}{m} + \frac{3g}{2l}\right)}_{\omega^2}\theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{6k}{m} + \frac{3g}{2l}} \Rightarrow \underline{\underline{\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{6k}{m} + \frac{3g}{2l}}}}}$$