



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
4 april 2024

Skrivtid: 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II upp till maximalt 8 poäng. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
Total	36		11	12	18	22	26	30

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. För en inverterbar $n \times n$ -matris A kan vi definiera en avbildning

$$L_A: M_{n,n}(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{n,n}(\mathbb{C})$$

genom $L_A(X) = AXA^{-1}$.

- (a) Visa att L_A är linjär. (1 p)
- (b) Visa att 1 är ett egenvärde för L_A för alla inverterbara matriser A . (1 p)
- (c) Bestäm den geometriska multipliciteten för egenvärdet 1 för L_A för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2 p)

2. Använd matriser för att bestämma lösningen till den linjära rekursionen

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - 5x_n, \quad n \geq 0$$

med begynnelsevärden $x_0 = 0, x_1 = 1$.

(4 p)

3. Låt $V = \mathbb{R}^3$ och $W = V \oplus \mathbb{R}$. Den bilinjära avbildningen $\Phi: V \times V \longrightarrow W$ som ges av kryssprodukt och skalärprodukt genom $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}, \mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ ger upphov till en linjär avbildning $L: V \otimes V \longrightarrow W$.

- (a) Bestäm rangen av L . (2 p)
- (b) Bestäm en bas för $\ker L$. (2 p)

Var god vänd!

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Formulera *isomorfisatsen* för linjära avbildningar $L: V \longrightarrow W$. (1 p)
 (b) Använd isomorfisatsen för att visa att $V/W \cong k^2$ om $V = k[x]$ och
 $W = \{x^2p(x) : p(x) \in k[x]\}$. (1 p)
 (c) Bevisa isomorfisatsen. (2 p)
5. (a) Definiera begreppet *inre produkt* för ett komplext vektorrum. (1 p)
 (b) Ge exempel på ett oändligdimensionellt inre produktrum. (1 p)
 (c) Bevisa Cauchy-Schwartz olikhet för reella inre produktrum. (2 p)

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt $\mathbb{F}_q$ vara kroppen med q element där q är en primtalspotens. Bestäm antalet matriser i $M_{m,n}(\mathbb{F}_q)$ som har rang 1 för positiva heltal m och n . (4 p)
7. För en $n \times n$ -matris A kan vi bilda en $2n \times 2n$ -matris B genom
- $$B = \begin{bmatrix} A & I \\ -I & A \end{bmatrix}.$$
- Visa att minimalpolynomet $q_B(x)$ är en faktor av $q_A(x+i)q_A(x-i)$ för alla $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, där $q_A(x)$ är minimalpolynomet för A . (4 p)
8. Matrisgruppen $SU_2(\mathbb{C})$ består av all unitära 2×2 -matriser med determinant 1. Bestäm ett delrum $V \subseteq M_{2,2}(\mathbb{C})$ sådant att $\exp(V) = SU_2(\mathbb{C})$. (4 p)
9. Beräkna matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Visa att Moore-Penrose-inversen av A ges av

$$A^+ = \frac{1}{2}A^\dagger - \frac{1}{6}B^\dagger$$

(4 p)