



**SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
Modelltentamen**

Skrivtid: 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa basala problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg.

Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Basala problem	7	8	8	8	8	8
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	0	0	3	6	9	12

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL I – BASALA PROBLEM

1. Beräkna den Jordankanoniska formen för den linjära operatören $D: P_4 \longrightarrow P_4$ som ges av $D(f) = f'(x)$ där P_4 är vektorrummet av polynom av grad högst fyra med komplexa koefficienter. **(4 p)**

2. Låt $V \subseteq L^2(S_{2\pi}^1)$ vara inre-produktrummet med bas som ges av funktionerna $\sin nx$, för $n = 1, 2, 3$ med den inre produkten

$$\langle f|g \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Bestäm matrisen för operatören $L: V \longrightarrow V$ som ges av

$$L(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(x - t) dt$$

med avseende på den givna basen och avgör om operatören är självdjungead. **(4 p)**

3. Låt A vara 3×3 -matrisen med element i $\mathbb{Z}_2$ - heltalen modulo 2 - som ges av

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestäm *minimalpolynomet* till A och använd detta för att avgöra om A är diagonaliserbar. **(4 p)**

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. För singularvärdesuppdelning av matriser används begreppet *unitära* matriser.
- (a) Vad betyder det att en matris är *unitär*? (1 p)
 - (b) Ge ett belysande exempel på en unitär 2×2 -matris. (1 p)
 - (c) Hur används singularvärdesuppdelning för definition av pseudoinvers? (1 p)
 - (d) Ge ett belysande exempel på pseudoinversen av en 3×4 -matris. (1 p)
5. I boken finns en sats som ger sambandet mellan två egenskaper hos ett par diagonaliserbara operatorer på ett ändligdimensionellt vektorrum, att de *kommuterar* och att de är *samtidigt diagonaliserbara*.
- (a) Vad betyder de båda egenskaperna? (1 p)
 - (b) Vilket är sambandet? (1 p)
 - (c) En del av sambandet är enkelt att bevisa. Vilket? Hur bevisar man det? (2 p)
-

Var god vänd!

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Den linjära partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

där k är en nollskild konstant kan analyseras med hjälp av linjära operatorer och deras egenvärden och egenvektorer på vektorrummet $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

(a) Skriv differentialoperatören $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ som en produkt av två kommuterande operatorer, L_1 och L_2 och bestäm egenvektorer till var och en av dessa operatorer.

(2 p)

(b) Visa att egenvektorer med egenvärde 0 till $L_1 \circ L_2$ kan skrivas som summor av egenvektorer med egenvärde 0 för L_1 respektive L_2 och använd det för att skriva upp den allmänna lösningen till differentialekvationen.

(2 p)

7. Låt $L: V \rightarrow V$ vara en operator på ett reellt vektorrum som med basen $\{e_1, e_2, e_3\}$ för V ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Med hjälp av L får vi en avbildning $L \otimes L^*: V \otimes V^* \rightarrow V \otimes V^*$ från den bilinjära avbildningen $V \times V^* \rightarrow V \otimes V^*$ som ges av $(x, \phi) \mapsto L(x) \otimes L^*(\phi)$, för $x \in V$ och $\phi \in V^*$.

(a) Bestäm matrisen för $L \otimes L^*$ med avseende på basen $\{e_i \otimes e_j^*\}$.

(2 p)

(b) Bestäm $\det(L \otimes L^*)$. (Ledning: $\det(L) = 7$.)

(2 p)

8. Följden $\{x_i\}_{i \geq 0}$ definieras genom den linjära rekursionen $x_{i+2} = x_{i+1} + x_i$, för $i \geq 0$ och $x_0 = x_1 = 1$. Bestäm x_{2017} om räkningarna sker i $\mathbb{Z}_{11}$.

(4 p)

9. Exponentialavbildningen för reella eller komplexa matriser ges av $\exp(A) = \sum_{i=0}^{\infty} A^i / i!$, för A i $M_n(k)$ där $k = \mathbb{R}$ eller $k = \mathbb{C}$.

(a) Visa att $\exp(A) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ om och endast om $\mathrm{Tr}(A) = 0$ för A i $M_n(\mathbb{R})$.

(2 p)

(b) Låt $V \subseteq M_2(k)$ ges av $V = \{A \in M_2(k) : \mathrm{Tr}(A) = 0\}$. Avgör om exponentialavbildningen $\exp: V \rightarrow \mathrm{SL}_2(k)$ är surjektiv för $k = \mathbb{R}$ respektive $k = \mathbb{C}$.

(2 p)