



**Lösningsförslag till tentamen
16 april 2020**

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt V vara vektorrummet av komplexa 2×2 -matriser. Låt $L: V \rightarrow V$ vara operatören som definieras av följande matrismultiplikation:

$$L(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

Bestäm Jordans normalform för L .

(4 p)

Lösningsförslag. Vi väljer standardbasen $\mathcal{B}$ med

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

I denna bas ges L av

$$[L]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att alla egenvärden är 1, att $\dim \ker(L - I) = 2$ och att $\dim \ker(L - I)^2 = 4$. Alltså är Jordans normalform

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Explicit är detta matrisen för L i basen

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Svar. Den har två stycken Jordanblock av storlek 2×2 , båda med egenvärde 1.

2. Låt $V = \mathbb{C}[t]$ vara vektorrummet av polynom med komplexa koefficienter med inre produkt

$$\langle f|g \rangle = \int_0^\infty \overline{f(t)}g(t)e^{-t} dt, \quad \text{för alla } f, g \text{ i } V.$$

Låt $L: V \rightarrow V$ vara operatoren som ges av $L(f) = tf'$. Bestäm den adjungerade operatoren $L^\dagger$. (När tentamen skrevs var uppgiften för "operatorn" $L(f) = f'$ på delrummet W av polynom med $f(0) = 0$. Men detta är inte en operator på W eftersom $f'(0)$ inte behöver vara 0. Operatoren på V som ges av $L(f) = f'$ saknar adjunkt.) **(4 p)**

Lösningsförslag. För $f, g \in W$ har vi att

$$\begin{aligned} \langle L(f)|g \rangle &= \int_0^\infty \overline{tf'(t)}g(t)e^{-t} dt \\ &= \left[\overline{f(t)}tg(t)e^{-t} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \overline{f(t)}(g(t)e^{-t} + tg'(t)e^{-t} - tg(t)e^{-t}) dt \\ &= \int_0^\infty \overline{f(t)}((t-1)g(t) - tg'(t))e^{-t} dt \end{aligned}$$

där vi har använt partiell integration, att $f(0) = 0$ och att $\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{f(t)}tg(t)e^{-t} = 0$ eftersom $f(t)tg(t)$ är ett polynom. Alltså är $L^\dagger(g) = (t-1)g - tg'$.

Med "operatorn" $L(f) = f'$ ger motsvarande beräkningar $L^\dagger(g) = g - g'$.

Svar. $L^\dagger(g) = (t-1)g - tg'$.

3. Betrakta den komplexa matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \\ i & i \end{bmatrix}$.

- (a) Bestäm singularvärdena till A . **(2 p)**
 (b) Bestäm höger- och vänstersingularvektorer till det största singularvärdet. **(2 p)**

Lösningsförslag.

- (a) Vi beräknar

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & i & -i \\ 1 & -i & -i \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^\dagger A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Eigenvärdena till $A^\dagger A$ är 2 och 4. Alltså har A singularvärdena $\sqrt{2}$ och 2.

- (b) Eigenvektorerna till $A^\dagger A$ med egenvärdet $\lambda = 4$ ger högersingularvektorer till singularvärdet $\sigma = 2$. En sådan egenvektor är $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och normerad $x = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Motsvarande vänster singularvektor ges av

$$y = \frac{1}{\sigma} Ax = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \\ i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ i/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Svar.

- (a) Singularvärdena är $\sqrt{2}$ och 2.

- (b) En höger singularvektor till 2 är $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ och en vänster singularvektor är $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ i/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Ge ett exempel på en 3×3 -sannolikhetsmatris (ej identitetsmatrisen). (1 p)
(b) Visa att en sannolikhetsmatris alltid har en egenvektor med egenvärde 1. (1 p)
(c) Antag att A är en sannolikhetsmatris sådan att alla element i matrisen A^3 är positiva. Vad kan vi då säga om egenvärdena med absolutbelopp 1 och deras algebraiska multipliciteter? (1 p)

Lösningsförslag.

- (a) Elementen i en sannolikhetsmatris ska vara icke-negativa och elementen i varje kolumn ska summera till 1. Till exempel:

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

- (b) Om A är en sannolikhetsmatris så är

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Alltså är

$$A^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

dvs vi har en egenvektor med egenvärde 1 till A^T . Eftersom egenvärdena till A och A^T sammanfaller, så är 1 också ett egenvärde till A .

- (c) Eftersom A^3 har positiva element, dvs A är reguljär, så säger Perron–Frobenius sats att det enda egenvärdet med absolutbelopp 1 är $\lambda = 1$ (som är ett egenvärde enligt (b)). Vidare säger satsen att detta egenvärde har algebraisk multiplicitet 1. Vi kan också formulera det som att det finns en unik stokastisk egenvektor med egenvärde av absolutbelopp 1 och denna vektor har egenvärde 1.

5. Låt V vara ett ändligtdimensionellt vektorrum och $L: V \rightarrow V$ en operator.
- (a) Vad innebär det att V är en *inre direkt summa* av två delrum V_1 och V_2 ? **(1 p)**
 - (b) Visa att V är en inre direkt summa av $\ker L$ och $\operatorname{im} L$ om L är diagonaliserbar. **(1 p)**
 - (c) Ge exempel på V och L så att V inte är en inre direkt summa av $\ker L$ och $\operatorname{im} L$.
(Tips: välj till exempel L så att $\operatorname{im} L \subseteq \ker L$.) **(1 p)**

Lösningsförslag.

- (a) Att V är en inre direkt summa av V_1 och V_2 innebär att varje vektor v i V kan skrivas *unikt* som en summa $v = v_1 + v_2$ med $v_i \in V_i$. Ekvivalent kan varje vektor skrivas som $v = v_1 + v_2$ och $V_1 \cap V_2 = 0$.
- (b) Välj en bas $e_1, e_2, \dots, e_n$ för V som diagonaliserar operatoren L . Låt λ_i vara motsvarande egenvärden så att matrisen för L är $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Låt $W_0 \subseteq V$ vara delrummet som spänns upp av de basvektorer e_i med $\lambda_i = 0$. Låt $W' \subseteq V$ vara delrummet som spänns upp av de övriga basvektorerna, dvs de e_i med $\lambda_i \neq 0$. Då är V den inre direkta summan av W_0 och W' .
- Vi observerar nu att kärnan $\ker L$ är egenrummet för egenvärdet 0, dvs W_0 . Vidare är bilden $\operatorname{im} L$ lika med delrummet W' . För att se det senare, notera att om $\lambda_i \neq 0$ så är $L(\lambda_i^{-1}e_i) = e_i$ så $W' \subseteq \operatorname{im} L$ och $\operatorname{im} L \subseteq W'$ eftersom

$$L\left(\sum_i a_i e_i\right) = \sum_i a_i \lambda_i e_i = \sum_{\substack{i \\ \lambda_i \neq 0}} (a_i \lambda_i) e_i.$$

- (c) Vi kan ta $V = \mathbb{C}^2$ och operatoren L som ges av matrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. För denna operator är $\ker L = \operatorname{im} L$ spannet av första basvektorn. Alltså är inte V den inre direkta summan av kärnan och bilden.

6. Låt V vara ett ändligtdimensionellt komplext inre-produktrum. En *skevhermiteisk* operator $L: V \rightarrow V$ är en operator sådan att $L^\dagger = -L$.
- (a) Visa att alla egenvärden till en skevhermiteisk operator är rent imaginära. **(1 p)**
 - (b) Kursboken visar att Hermiteiska, dvs självdjungerade, operatorer är diagonaliserbara. Använd detta för att visa att skevhermiteiska operatorer är diagonaliserbara. **(1 p)**

Lösningsförslag.

- (a) Låt λ vara ett egenvärde till L med egenvektor ξ . Då är

$$\langle \xi, L(\xi) \rangle = \langle \xi, \lambda \xi \rangle = \lambda \|\xi\|^2$$

och eftersom L är skevhermiteisk är detta lika med

$$\langle -L(\xi), \xi \rangle = \langle -\lambda \xi, \xi \rangle = -\bar{\lambda} \|\xi\|^2.$$

Eftersom $\|\xi\|^2 \neq 0$ är alltså $\bar{\lambda} = -\lambda$, dvs λ är rent imaginärt.

- (b) Operatoren iL är Hermiteisk eftersom $(iL)^\dagger = \bar{i}L^\dagger = (-i)(-L) = iL$. Alltså är iL diagonaliserbar. Om ξ är en egenvektor till iL med egenvärde $\lambda \in \mathbb{R}$ så är $L(\xi) = -i \cdot (iL)(\xi) = -i\lambda \xi$. Alltså är ξ även en egenvektor till L med egenvärde $-i\lambda$. En bas bestående av egenvektorer till iL (vilket finns eftersom iL är diagonaliserbar) ger alltså en samtidig diagonalisering av både L och iL .

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

7. Betrakta Hilbertrummet $\ell_2(\mathbb{C})$ av oändliga följder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ av komplexa tal sådana att $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$ med den inre produkten $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_j} b_j$. Låt L vara operatören på $\ell_2(\mathbb{C})$ som tar följden $(a_0, a_1, \dots)$ på följden $(b_0, b_1, \dots)$ där

$$b_j = \frac{1}{2}(a_{j-1} + a_{j+1}) \quad (\text{med konventionen att } a_{-1} = 0).$$

- (a) Är L unitär? (1 p)
 (b) Är L självdjunerad? (1 p)
 (c) Visa att $L(\mathbf{a})$ verkligen tillhör $\ell_2(\mathbb{C})$ om $\mathbf{a}$ gör det. (1 p)
 (d) Bestäm kärnan till L . (2 p)

Lösningförslag.

- (a) Nej, L är inte unitär eftersom om $\mathbf{a} = (1, 0, 0, \dots)$ så är $\|\mathbf{a}\| = 1$ medan $\|L(\mathbf{a})\| = \frac{1}{4}$.
 (b) L är självdjunerad precis när $\langle L(\mathbf{a}) | \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a} | L(\mathbf{b}) \rangle$ för alla vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \ell_2(\mathbb{C})$. Det räcker att verifiera detta på Hilbertbasen $\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$. Vi har att (med konventionen $\mathbf{e}_{-1} = 0$):

$$\begin{aligned} \langle L(\mathbf{e}_i) | \mathbf{e}_j \rangle &= \left\langle \frac{1}{2}(\mathbf{e}_{i-1} + \mathbf{e}_{i+1}) | \mathbf{e}_j \right\rangle = \frac{1}{2}(\delta_{i-1,j} + \delta_{i+1,j}) \\ \langle \mathbf{e}_i | L(\mathbf{e}_j) \rangle &= \left\langle \frac{1}{2}(\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_{j-1} + \mathbf{e}_{j+1}) \right\rangle = \frac{1}{2}(\delta_{i,j-1} + \delta_{i,j+1}) \end{aligned}$$

vilka är lika och alltså är L självdjunerad. Alternativt kan vi helt enkelt skriva ner matrisen för L i basen $\mathbf{e}_i$ och se att den är Hermitesk.

- (c) Vi behöver visa att serien

$$\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4} |(a_{j-1} + a_{j+1})|^2$$

konvergerar. Men enligt triangelolikheten är

$$|(a_{j-1} + a_{j+1})|^2 \leq (|a_{j-1}| + |a_{j+1}|)^2 \leq 3(|a_{j-1}|^2 + |a_{j+1}|^2)$$

där vi också använt att $2|x| \cdot |y| \leq 2 \max\{|x|^2, |y|^2\} \leq 2(|x|^2 + |y|^2)$. Alltså är

$$\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|^2 \leq \frac{3}{4}|a_0|^2 + \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 \leq \infty.$$

Alternativt kan vi använda att $\ell_2(\mathbb{C})$ är ett vektorrum och att $(a_1, a_2, \dots)$ och $(0, a_0, a_1, \dots)$ är vektorer i $\ell_2(\mathbb{C})$.

- (d) Kärnan ges av de följder $a_0, a_1, \dots$ sådana att $b_0 = b_1 = \dots = 0$. Detta ger ekvationerna

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_0 + a_2 &= 0 \\ a_1 + a_3 &= 0 \\ &\dots \end{aligned}$$

Av ekvationerna med udda index får vi att $0 = a_1 = a_3 = a_5 = \dots$ och ur de med jämna index får vi $a_0 = -a_2 = a_4 = -a_6 = \dots$. Men eftersom

$$\|\mathbf{a}\| = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 = |a_0|^2 + 0 + |a_0|^2 + 0 + |a_0|^2 + \dots$$

så finns inga konvergenta lösningar. Alltså är kärnan trivial.

Svar.

- (a) Nej, inte unitär.
- (b) Ja, självadjungerad.
- (c) Se lösning.
- (d) $\ker L = 0$.

8. Betrakta följande stokastiska process i diskret tid. Tillstånden ges av $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$, dvs heltalen modulo 3, och om tillståndet vid tiden t är $n \in \mathbb{Z}_3$ så är tillståndet vid tiden $t + 1$

- $n^2 \in \mathbb{Z}_3$ med sannolikheten $1 - 2\alpha$,
- $n^2 - 1 \in \mathbb{Z}_3$ med sannolikheten α , och
- $n^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3$ med sannolikheten α ,

där $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ är en konstant. Modellera detta som en Markovkedja. Avgör för vilka α som processen konvergerar mot en sannolikhetsfördelning som inte beror på tillståndet vid tiden $t = 0$. Bestäm den stationära sannolikhetsfördelningen för dessa α . **(5 p)**

Lösningsförslag. Eftersom $0^2 = 0$, $1^2 = 1$ och $2^2 = 1$ i $\mathbb{Z}_3$ så beskrivs Markovkedjan av den stokastiska matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 - 2\alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 - 2\alpha & 1 - 2\alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{bmatrix}.$$

Om $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ så är matrisen A positiv. Om $\alpha = \frac{1}{2}$ så är inte A positiv men A^3 är positiv. Alltså är A reguljär om $\alpha > 0$ och Perron–Frobenius sats säger att processen konvergerar mot sannolikhetsfördelningen som ges av den unika stokastiska egenvektorn med egenvärde 1. Vi löser därför $(A - I)x = 0$:

$$A - I = \begin{bmatrix} -2\alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & -2\alpha & 1 - 2\alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha - 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -3\alpha & 2 - 3\alpha \\ \alpha & -2\alpha & 1 - 2\alpha \\ 0 & 3\alpha & 3\alpha - 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \alpha & \alpha - \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vilket ger den stokastiska egenvektorn

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} - \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

och alltså den stationära sannolikhetsfördelningen $x = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3} - \alpha, \alpha)$.

Om istället $\alpha = 0$ får vi den stokastiska matrisen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi noterar att $A^2 = A$ så processen konvergerar redan efter en iteration. Dock så beror processen på starttillståndet: börjar vi på 0 så förblir vi på 0 med 100% sannolikhet. Börjar vi på 1 eller 2 hamnar vi med 100% sannolikhet på 1.

Svar. Om $\alpha > 0$ konvergerar processen mot den stationära sannolikhetsfördelningen $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} - \alpha, \alpha)$. Om $\alpha = 0$ konvergerar processen men beror på starttillståndet.

9. Låt V och W vara vektorrum av dimension m och n över en kropp K . Låt

$$P = \{ v \otimes w : v \in V, w \in W \} \subseteq V \otimes W$$

vara de dekomposerbara (även kallade rena) tensorerna.

- (a) För vilka m och n är $P = V \otimes W$? Är svaret samma för alla kroppar K ? (3 p)
 (b) Om $K = \mathbb{Z}_p$ är heltalen modulo p för ett primtal p , hur många element har P ? (3 p)

Lösningsförslag. Låt $e_1, e_2, \dots, e_m$ och $f_1, f_2, \dots, f_n$ vara baser för V och W .

- (a) Om $m, n \geq 2$ så har vi tensorn $e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$. Om denna tensor vore dekomposerbar skulle vi kunna hitta skalärer $a_1, a_2, \dots, a_m$ och $b_1, b_2, \dots, b_n$ sådana att

$$e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2 = \left(\sum_i a_i e_i \right) \otimes \left(\sum_j b_j f_j \right) = \sum_{i,j} a_i b_j (e_i \otimes f_j).$$

Eftersom $\{e_i \otimes f_j\}_{i,j}$ är en bas, ger detta att $a_1 b_1 = 1$, $a_2 b_2 = 1$, $a_1 b_2 = 0$, $a_2 b_1 = 0$ vilket saknar lösningar eftersom de första två ekvationerna ger att a_1, a_2, b_1, b_2 är nollskilda. Detta argument fungerar för alla kroppar K .

Om däremot $m = 1$ så kan varje tensor skrivas som

$$\sum_j a_{1j} (e_1 \otimes f_j) = e_1 \otimes \left(\sum_j a_{1j} f_j \right)$$

och analogt om $n = 1$. Om $m = 0$ eller $n = 0$ så är $V \otimes W = 0$.

- (b) Låt $v = \sum_i a_i e_i \in V$ och $w = \sum_j b_j f_j \in W$. Eftersom vi kan välja varje a_i och b_j på p olika sätt så finns det p^m och p^n sätt att välja v och w på. Låt $v' = \sum_i a'_i e_i$ och $w' = \sum_j b'_j f_j$ vara två andra vektorer.

Antag först att $v \neq 0$ och $w \neq 0$. Då finns index i_0 och j_0 så att $a_{i_0} \neq 0$ och $b_{j_0} \neq 0$. Antag nu vidare att $v \otimes w = v' \otimes w'$. Då är $a_i b_j = a'_i b'_j$ för alla i, j och därmed $a'_{i_0} b'_{j_0} \neq 0$. Om vi låter $\lambda = a'_{i_0} / a_{i_0}$ så har vi att $b'_{j_0} / b_{j_0} = 1/\lambda$. För alla i och j gäller då

$$a'_i = a_i \frac{b_{j_0}}{b'_{j_0}} = \lambda a_i$$

$$b'_j = b_j \frac{a_{i_0}}{a'_{i_0}} = \frac{1}{\lambda} b_j.$$

Alltså är $v' = \lambda v$ och $w' = \frac{1}{\lambda} w$ för någon skalär $\lambda \neq 0$. Eftersom $v, 2v, 3v, \dots, (p-1)v$ alla är olika är det alltså precis $p-1$ olika par $(v, w), (2v, 2^{-1}w), (3v, 3^{-1}w), \dots, ((p-1)v, (p-1)^{-1}w)$ som ger samma tensor $v \otimes w$. Detta ger $\frac{(p^n-1)(p^m-1)}{p-1}$ stycken tensorer.

Om istället $v = 0$ eller $w = 0$ så är $v \otimes w = 0$. Detta ger en tensor. Sammanlagt har vi alltså $\frac{(p^m-1)(p^n-1)}{p-1} + 1$ dekomposerbara tensorer. (Totalt finns det p^{mn} tensorer vilket är lika med antalet dekomposerbara tensorer precis när $m \leq 1$ eller $n \leq 1$.)

Svar.

- (a) Alla tensorer är dekomposerbara precis när $m \leq 1$ eller $n \leq 1$ oavsett kroppen K .
 (b) Det finns $\frac{(p^n-1)(p^m-1)}{p-1} + 1$ stycken dekomposerbara tensorer.