

Tentamen i SE1055 Hållfasthetslära grundkurs med energimetoder 2018-08-24, kl 8-13

Resultat finns på Mina Sidor senast 21/9 2018 kl. 17. Begäran av omprövning inom en månad.

Hjälpmedel: Formelsamling i hållfasthetslära, matematisk handbok och räknedosa.

Examinator: Bo Alfredsson, tel 790 7667

Frågor under tentamen: Erik Olsson, tel 073-033 0425

OBS! Skriv endast på en sida av bladen.

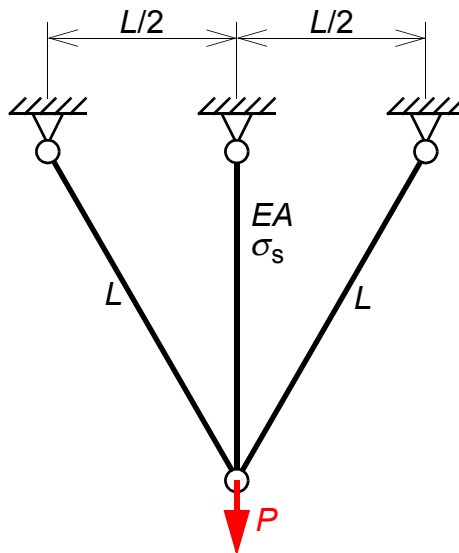
Skriv tydligt namn, program och personnummer på varje blad.

Rita gärna figurer i färg men ej med rödpenna.

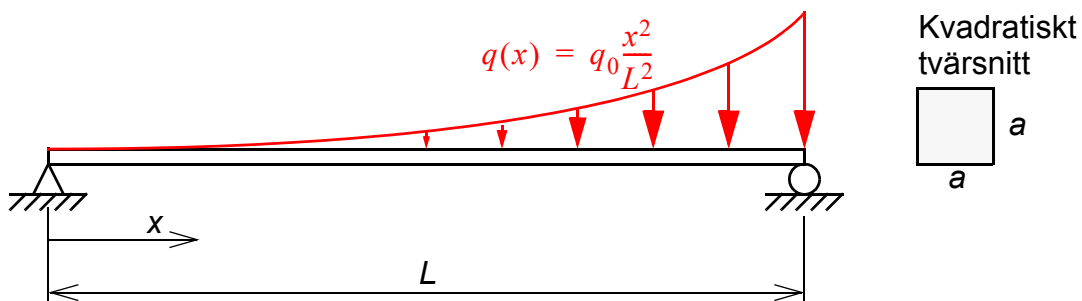
Exakt metod ska användas för lösning om inte annat anges i uppgiften

Betygsgränser: 0 - 11 ger F; 12 - 13 ger FX; 14 - 17 ger E; 18 - 21 ger D; 22 - 24 ger C; 25 - 28 ger B; 29 - 40 ger A. FX = möjlig komplettering till E.

- 1.** Kraften P tas upp av tre stänger orienterade enligt figuren. De yttre stängerna har längden L . Alla stängerna har tvärsnittsarean A , elasticitetsmodulen E och flytspänningen σ_s . Bestäm kraften P_s som ger inledande plasticering någonstans i strukturen. (6p)

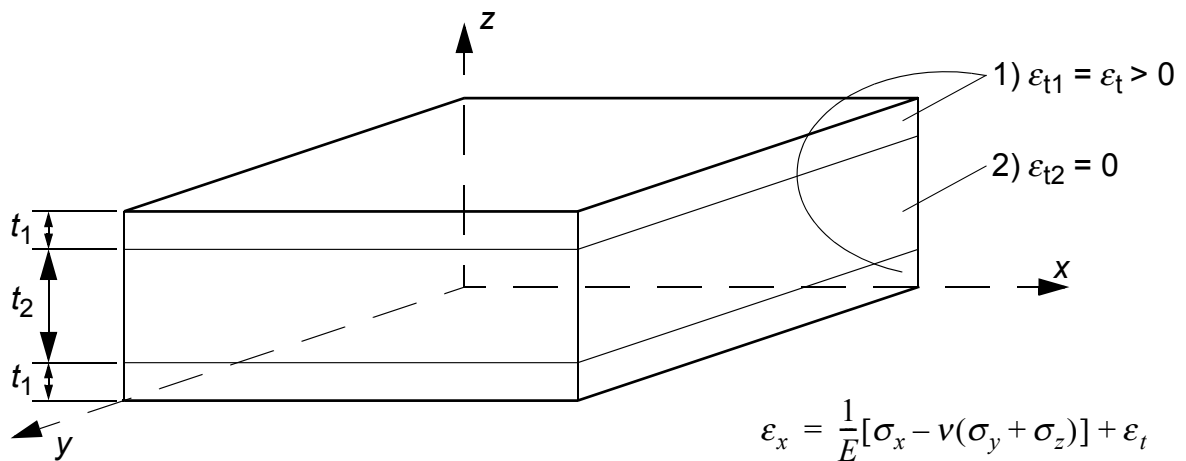


- 2.** Den fritt upplagda balken i figuren är belastad med en utbredd last $q(x)$ enligt figuren. Balken har kvadratisk tvärsnitt med sida a . Bestäm den största böjspänningen $\sigma_{\max}$ som uppkommer i balken. (6p)

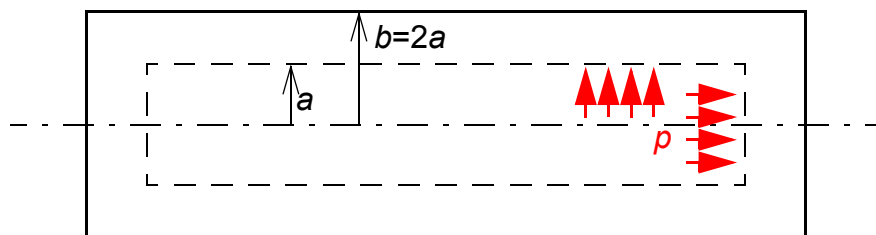


3. Vid sätthärdning av stål fås en hård yta och restspänningar. Restspänningarna är en följd av relativ volymändring vid fasomvandling till martensit under härdförloppet. Restspänningarna finns alltså redan i det obelastade materialet.

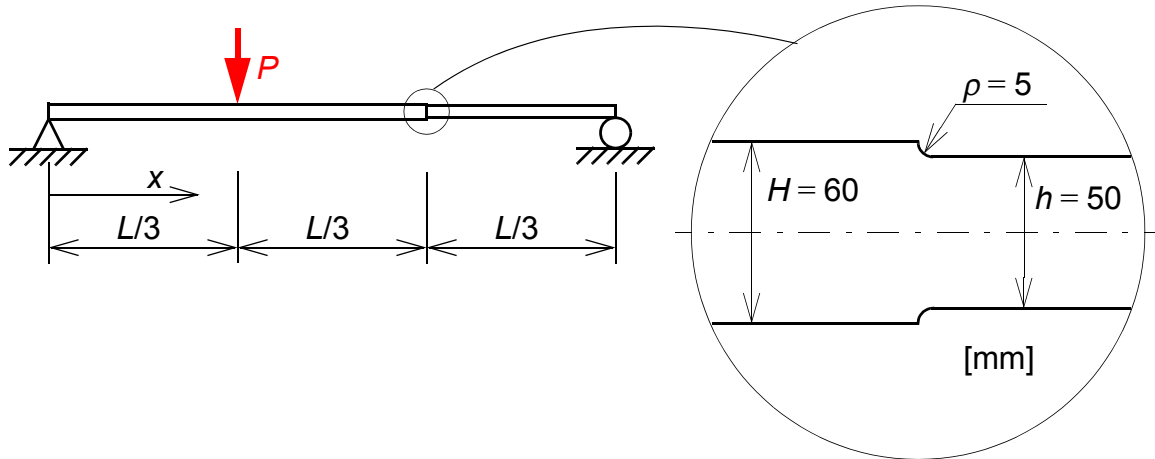
Din uppgift är att bestämma restspänningarna efter sätthärdning i en plan i övrigt obelastad skiva. Du ska bestämma restspänningarna i både ytskikt (1) och kärna (2), se figuren. Den för restspänningarna intressanta materialeffekten kan sammanfattas i en isotrop (lika stor i alla riktningar) härdtöjning $\varepsilon_t > 0$ i skivans övre och undre ytskikt (1). Härdtöjningen påverkar materialsambandet för yta och kärna på samma sätt som en temperaturhöjning ($\alpha\Delta T$), se exempel på materialsamband för ε_x . Antag att restspänningarna är konstanta i z -led i respektive skikt. (6p)



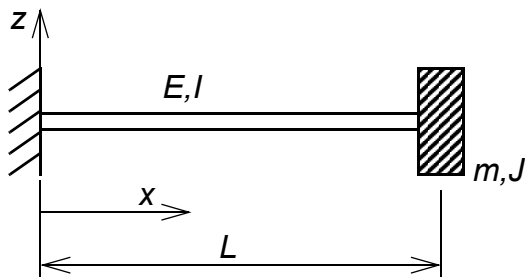
4. Ett slutet tjockväggigt rör med cirkulärt tvärsnitt belastas med ett inre övertryck p . Innerradien är a och ytterradien är $b = 2a$. Bestäm största effektivspänning enligt von Mises och enligt Tresca i den cylindriska delen av röret, dvs långt från gavlarna. Hur stor den procentuella skillnaden mellan dem? (6p)

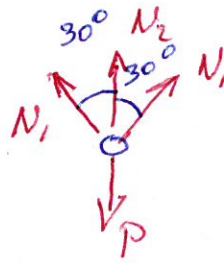
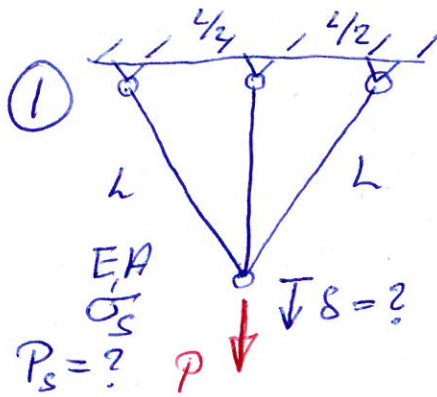


5. En fritt upplagd balk har längden $L = 1,5$ m. Balkens tvärsnitt är rektangulärt. Höjden av tvärsnittet minskar från $H = 60$ mm till $h = 50$ mm vid en punkt belägen $2/3$ från vänstra stödet. Övergången har radien $\rho = 5$ mm. Tvärsnittets bredd är $b = 50$ mm, samma för hela balken. Balken är belastad med en punktkraft $P = P_0(1+\sin(\omega t))$ som angriper vid $1/3$ av balkens längd från vänstra stödet, se figuren. Bestäm största tillåtna P_0 om säkerheten mot utmattning i höjdändringen ska vara $n_u = 1,3$. Materialet är stål 141312-00 och ytfinheten $R_a = 30$ μm . (6p)



6. Längst ut på en masslös konsolbalk med längden L , elasticitetsmodulen E och yttröghetsmomentet I sitter en punktmassa med massan m och masströghetsmomentet $J = mL^2$ i x - z planet. Bestäm samtliga egenfrekvenser för svängningar i planet. (6p)





$$\uparrow \frac{\sqrt{3}}{2} N_1 \cdot 2 + N_2 - P = 0 \quad (1)$$

$\delta_2 = \delta$
 $\delta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \delta_2$

(2)

"mtrl" $\delta_i = \frac{N_i L_i}{EA} \quad (3)(4)$

(3)(4) i (2) $\frac{N_1 L}{EA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{N_2 \sqrt{3} L}{EA} \Rightarrow N_1 = \frac{3}{4} N_2 \quad (5)$

i (1) $\frac{\sqrt{3} \cdot 3}{4} N_2 + N_2 - P = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{4P}{\sqrt{3} \cdot 3 + 4} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{\sqrt{3} \cdot 2 P L}{(\sqrt{3} \cdot 3 + 4) EA}}$

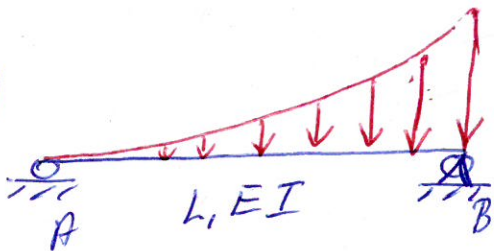
i (5)

$N_1 = \frac{3P}{\sqrt{3} \cdot 3 + 4} \Rightarrow N_1 < N_2 \Rightarrow P_s \text{ ur } N_{2s}$

$P_s = \frac{\sqrt{3} \cdot 3 + 4}{4} N_{2s} \Rightarrow \boxed{P_s = \frac{\sqrt{3} \cdot 3 + 4}{4} \delta_s \cdot A}$

Lösningsförslag tentamen SE1055
24/8 2018

②



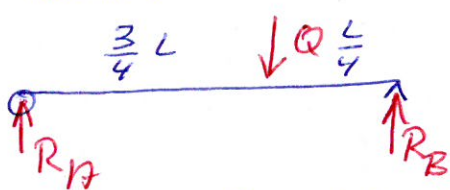
$$q(x) = q_0 \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

Bestäm $\sigma_{\max}$
för kvadratisk
tvärsnitt, sida a,
 $q_0 \left[\frac{N}{m}\right]$

I) $M(x)$ ur jämv.

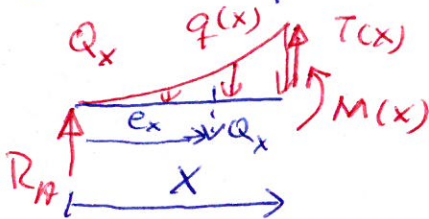
$$\text{Total last } Q = \int_0^L q_0 \left(\frac{x^2}{L^2}\right) dx = \frac{q_0}{3L^2} L^3 = \frac{q_0 L}{3}$$

Resultantens
höjnad från A $Qe = \int_0^L q_0 \left(\frac{x^2}{L^2}\right) \cdot x dx = \frac{q_0 L^2}{4} \Rightarrow e = \frac{q_0 L^2}{4q_0 L} = \frac{3}{4}L$



$$\uparrow \textcircled{B} \quad R_A L - Q \frac{L}{4} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{Q}{4}$$

Snitta för $M(x)$



pss som ovan:

$$Q_x = \int_0^x q_0 \left(\frac{\xi^2}{L^2}\right) d\xi = \frac{q_0 x^3}{3L^2}$$

$$e_x = \frac{1}{Q_x} \int_0^x q_0 \frac{\xi^3}{L^2} d\xi = \frac{q_0 x^4 \cdot 3L^2}{4L^2 q_0 x^3} = \frac{3}{4}x$$

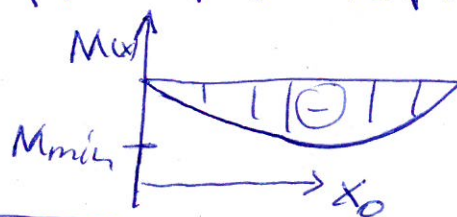
$$\uparrow \textcircled{x} \quad M(x) - R_A x + Q_x (x - e) = 0$$

$$M(x) = R_A x - Q_x \frac{x}{4} = \frac{q_0 L}{3 \cdot 4} x - \frac{q_0 x^3 \cdot x}{3L^2 \cdot 4} = \frac{q_0 L^2}{12} \left(\frac{x}{L} - \frac{x^4}{L^4} \right)$$

$$T(x) = \frac{dM}{dx} = \frac{q_0 L}{12} \left(1 - \frac{4x^3}{L^3} \right) = 0 \Rightarrow x_0 = \sqrt[3]{\frac{L^3}{4}} = \frac{L}{\sqrt[3]{4}}$$

$$M_{\min} = M(x_0) = \frac{q_0 L^2}{12} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \right) = \frac{q_0 L}{12 \sqrt[3]{4}} \left(1 - \frac{1}{4} \right) =$$

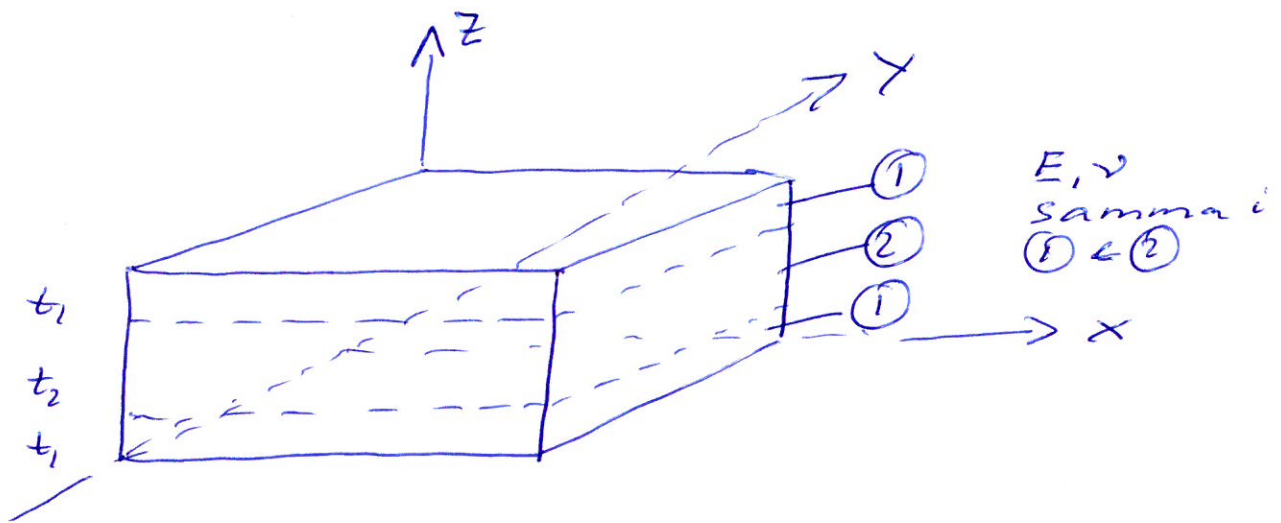
$$M_{\min} = \frac{q_0 L^2}{16 \sqrt[3]{4}}$$



$$W_b = \frac{a^3}{6}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_b} = \frac{3q_0 L^2}{8 \sqrt[3]{4} a^3}$$

③



$\Rightarrow \epsilon_x \text{ \& } \epsilon_y \text{ konstanta i } x\text{-}y \text{ led}$
 $z\text{-led} \Rightarrow \epsilon_{x1} = \epsilon_{x2} \text{ (komp)}$

Symmetri i $x\text{-}y$ led: $\sigma_{x1} = \sigma_{y1}$
 $\sigma_{x2} = \sigma_{y2}$

Plan Spänning $\sigma_z = 0$
 Betrakta t.ex. $x\text{-led}$

$$\epsilon_x = \epsilon_y$$

jämv: $\sigma_{x1} \cdot 2t_1 + \sigma_{x2} t_2 = 0$ (1)

Komp: $\epsilon_{x1} = \epsilon_{x2}$ (2)

matr: $\epsilon_{x1} = \frac{1}{E} [\sigma_{x1} - \nu (\sigma_{y1} + \sigma_z)] + \epsilon_t$ (3)

$$\epsilon_{x2} = \frac{1}{E} [\sigma_{x2} - \nu (\sigma_{y2} + \sigma_z)] \quad (4)$$

(4)(3) i (2)
 $\frac{1}{E} [\sigma_{x1} - \nu \sigma_{y1}] + \epsilon_t = \frac{1}{E} [\sigma_{x2} - \nu \sigma_{y2}]$
 $+ \sigma_{x1} = \sigma_{y1} \text{ etc}$

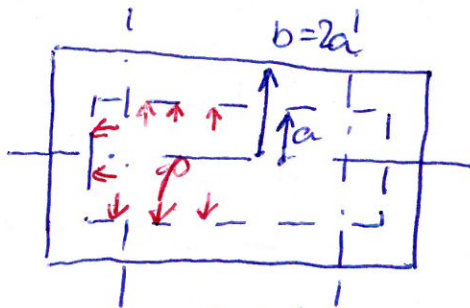
$$\sigma_{x1} + \frac{\epsilon_t E}{1-\nu} = \sigma_{x2}$$

i (1)
 $\sigma_{x1} 2t_1 + \sigma_{x1} t_2 + \frac{\epsilon_t E}{1-\nu} t_2 = 0$

$$\sigma_{x1} = - \frac{t_2 \epsilon_t E}{(t_2 + 2t_1)(1-\nu)}$$

$$\sigma_{x2} = \frac{\epsilon_t E (t_2 + 2t_1 - t_1)}{(t_2 + 2t_1)(1-\nu)} = \frac{2t_1 \epsilon_t E}{(t_2 + 2t_1)(1-\nu)} = \sigma_{x2}$$

4



cyindriska
delen av bogen
från garlarna

FS eq 3.30, 3.32

FS eq 7.30 med $\lambda = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$

$$\sigma_r = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) = \frac{p}{3} \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} \right), \quad \sigma_r(a) = -7$$

$$\sigma_\varphi = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) = \frac{p}{3} \left(1 + \frac{4a^2}{r^2} \right), \quad \sigma_\varphi(a) = \frac{5}{3}$$

$$\sigma_z = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} = \frac{p}{3} \quad \sigma_z(a) = \frac{p}{3}$$

σ_r min & σ_φ max för $r=a$
gen max σ^{VM} & σ^T för $r=a$

$$\sigma^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 \right)^{1/2}$$

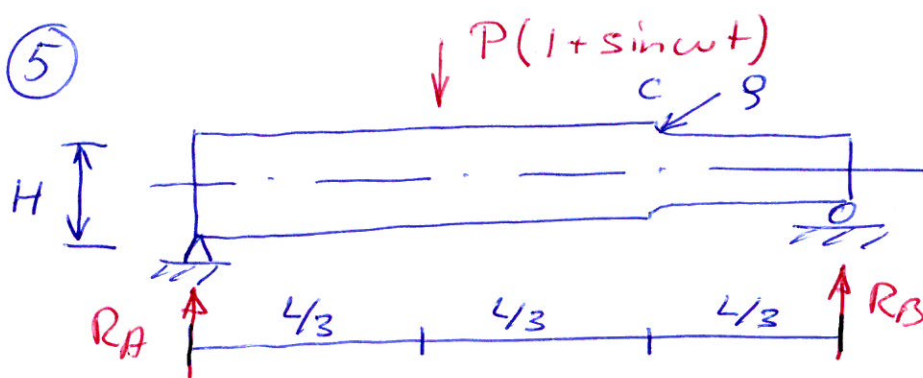
$$= \frac{p}{3\sqrt{2}} \left[\underbrace{(-3-5)^2}_{64} + \underbrace{(5-1)^2}_{16} + \underbrace{(-3-1)^2}_{16} \right] = \frac{p}{3\sqrt{2}} \sqrt{96}$$

$$= \frac{p \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} p \approx 2,31 p$$

$$\sigma^T = \max \{ |\sigma_r - \sigma_\varphi|, |\sigma_\varphi - \sigma_z|, |\sigma_r - \sigma_z| \} = \frac{8}{3} p \approx 2,67 p$$

$$\frac{\sigma^T - \sigma^{VM}}{\sigma^{VM}} \approx 0,155 = 15,5\%$$

5



$$\sum \mathcal{M}_A: R_B L - P \frac{L}{3} = 0$$

$$R_B = P/3$$

$$h = 50 \text{ mm}$$

$$b = 50 \text{ mm}$$

$$H = 60 \text{ mm}$$

$$L = 1500 \text{ mm}$$

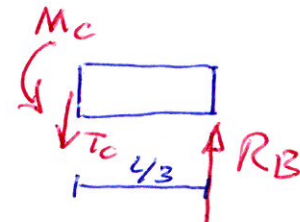
$$\rho = 5 \text{ mm}$$

$$FS \text{ tab 32.1.2}$$

$$R_a = 30 \mu\text{m}$$

$$n_u = 1,3$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{H}{h} = 1,2 \\ \frac{\rho}{h} = 0,1 \end{array} \right\} K_t = 1,68$$



$$\sum \mathcal{M}_C: M_C + R_B \frac{L}{3} = 0$$

$$M_C = - \frac{PL}{9}$$

$$14/312-00$$

$$\sigma_B = 360 - 460 = 410 \text{ MPa}$$

$$R_{eb} = 260 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ub} = \pm 170 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ubp} = 150 \pm 150 \text{ MPa}$$

$$\text{Fig 25.9}$$

$$q = 0,81$$

$$\text{Eq 25.4}$$

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1,55 \left\{ \frac{2}{k_r k_d k_f} = 0,561 \right.$$

$$\text{Fig 25.12}$$

$$\frac{1}{k_r} = 0,87$$

$$\sigma_{ub,red} = \pm 95,37 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{ubp,red} = 150 \pm 84,15 \text{ MPa}$$

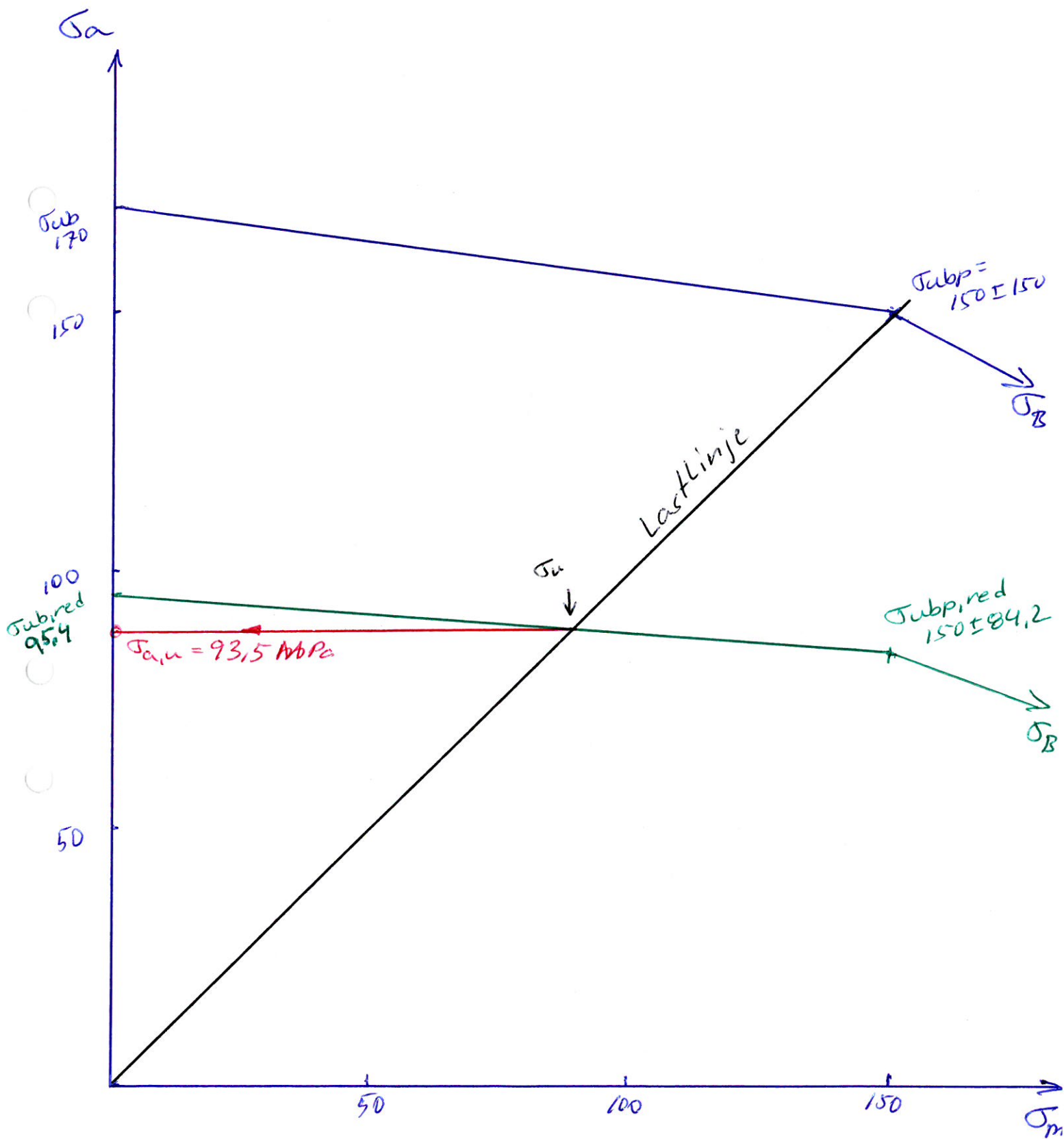
Bestäm $P_{o,till}$ då $n_u = 1,3 \Rightarrow$ Rita Haigh diagram

$$\text{Haigh} \Rightarrow \sigma_{a,u} = 93,5 \text{ MPa} \quad \sigma_{a,till} = \frac{\sigma_{a,u}}{n_u} = 71,9 \text{ MPa}$$

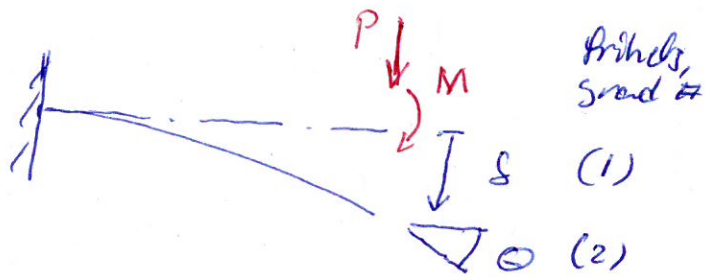
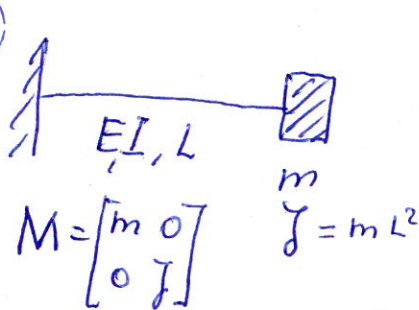
$$W_b = \frac{bh^2}{6}$$

$$M_{ca,till} = \sigma_{a,till} W_b = 1498 \text{ Nm}$$

$$P_{o,till} = \frac{9 M_{ca,till}}{L} = 8990 \text{ N} \approx 9,0 \text{ kN}$$



6



Flexibilitätsformulierung (ok vid statiskt best struktur)

$\left. \begin{array}{l} P=1 \\ M=0 \end{array} \right\} \quad \delta = \frac{1L^3}{3EI} \quad \left. \begin{array}{l} \theta=0 \\ M=1 \end{array} \right\} \quad \delta = \frac{1L^2}{2EI} \Rightarrow \alpha = \frac{L}{EI} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{3} & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & 1 \end{bmatrix}$
 FS 31.1.1
 31.1.2
 $\theta = \frac{1L^2}{2EI}$
 $\theta = \frac{1L}{EI}$

FS 11.22
 $\frac{2}{\omega_{1,2}^2} = \alpha_{11}m_1 + \alpha_{22}m_2 \pm \sqrt{(\alpha_{11}m_1 - \alpha_{22}m_2)^2 + 4\alpha_{12}\alpha_{21}m_1m_2}$
 $= \frac{mL^3}{EI} \left[\frac{1}{3} + \frac{3}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \right] = \frac{mL^3}{EI} \left[\frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{13}}{3} \right]$

$\frac{4}{9} + \frac{9}{9} = \frac{13}{9}$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{2EI}{mL^3} \cdot \frac{3}{4-\sqrt{13}}} \approx 3,90 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$

$\omega_2 = \sqrt{\frac{2EI}{mL^3} \cdot \frac{3}{4+\sqrt{13}}} \approx 0,888 \sqrt{\frac{EI}{mL^3}}$

$N^{(1)} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\theta_1}{\delta_1} = \frac{\frac{1}{\omega_1^2} - \alpha_{11}m_1}{\alpha_{12}m_2} = \frac{\frac{1}{3,90^2} \frac{mL^3}{EI} - \frac{1}{3} \frac{mL^3}{EI}}{\frac{mL^2 L^2}{2EI}} = \frac{\frac{1}{3,90^2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} L} \approx -0,154 \frac{1}{L}$

$N^{(2)} = \frac{\theta_2}{\delta_2} = \frac{\frac{1}{\omega_2^2} - \alpha_{11}m_1}{\alpha_{12}m_2} = \frac{\frac{1}{0,888^2} \frac{mL^3}{EI} - \frac{1}{3} \frac{mL^3}{EI}}{\frac{mL^2 L^2}{2EI}} = \frac{(\frac{1}{0,888^2} - \frac{1}{3})}{\frac{1}{2} L} = 1,586 \frac{1}{L}$

