



Lösningssförslag till tentamen
17 april 2019

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet av polynom med komplexa koefficienter. Definiera $L: V \rightarrow V$ genom $L(p(x)) = p(x+1) + p(x-1)$ för alla $p(x) \in V$. Visa att L är linjär och bestäm en bas för kärnan $\ker(L)$ och en bas för bildrummet $\operatorname{im}(L)$.

(4 p)

Lösningssförslag. Vi har att $L(p(x) + q(x)) = (p(x+1) + q(x+1)) + (p(x-1) + q(x-1)) = p(x+1) + p(x-1) + q(x+1) + q(x-1) = L(p(x)) + L(q(x))$ för alla $p(x), q(x) \in V$ och $L(ap(x)) = ap(x+1) + ap(x-1) = a(p(x+1) + p(x-1)) = aL(p(x))$, för alla $a \in \mathbb{C}$ och alla $p(x) \in V$. Alltså är L linjär.

Vi ser på ett polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ där $a_n \neq 0$. Då är

$$L(p(x)) = \sum_{k=0}^n a_k L(x^k) = \sum_{k=0}^n a_k (x+1)^k + a_k (x-1)^k = 2a_n x^n + \text{termer av lägre grad}.$$

Alltså kan bara $L(p(x)) = 0$ om alla koefficienter i $p(x)$ är noll, dvs om $p(x)$ är nollpolynom. Alltså är L injektiv och kärnan är $\ker(L) = \{0\}$. För att visa att L är surjektiv och $\operatorname{im}(L) = V$ kan vi använda induktion. Basfallet är att $L(1/2) = 1$. Antag per induktion att $1, x, \dots, x^{n-1}$ ligger i bildrummet till L . Vi tar nu och beräknar

$$L(x^n/2) = (x+1)^n/2 + (x-1)^n/2 = x^n + p(x)$$

där $p(x)$ har grad lägre än n . Per induktion är $p(x) \in \operatorname{im}(L)$ och därmed är $x^n = L(1/2x^n) - p(x) \in \operatorname{im}(L)$.

Ett alternativ till induktion är att se att varje polynom $p(x)$ ligger i ett ändligdimensionellt delrum P_n av polynom av grad högst n . Eftersom L avbildar polynom av grad n på polynom av grad n är restriktionen av L till P_n en linjär operator som enligt tidigare är injektiv. Därmed är den också surjektiv på P_n .

En bas för kärnan är tomma mängden och $\{1, x, x^2, \dots\}$ är en bas för bildrummet.

Svar. En bas för kärnan är tomma mängden och $\{1, x, x^2, \dots\}$ är en bas för bildrummet.

2. Låt

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) Avgör vilka av matriserna i S som är Hermiteska och bestäm egenvärdena för någon av dessa.

(2 p)

(b) Avgör vilka av matriserna i S som är unitära och bestäm egenvärdena för någon av dessa.

(2 p)

Lösningsförslag.

(a) En matris A är Hermitesk om $A^\dagger = A$. Det betyder att realdelen är symmetrisk och imaginärdelen är skevsymmetrisk. Endast de två sista matriserna uppfyller detta. Egenvärdena är reella. För den första av de två har vi att determinanten är 0 och spåret är $\sqrt{2}$. Alltså är egenvärdena 0 och $\sqrt{2}$. För den andra är determinanten $(1/\sqrt{3})^2(-1-2) = (1/3)(-3) = -1$ och spåret är 0. Därmed är egenvärdena ± 1 .

(b) För att en matris ska vara unitär måste kolonnerna utgöra en ortonormal bas. Alla kolonnvektorer har längd 1, så det räcker att kontrollera om de är ortogonala mot varandra. Vi får

$$\left\langle \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\rangle = (-i) \cdot 1 + 1 \cdot i = 0, \quad \left\langle \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\rangle = i \cdot 1 + 1 \cdot i = 2i \neq 0,$$

vilket visar att den första och den tredje är unitära men inte den andra och fjärde. För den femte ser vi att

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot (1-i) + (1-i) \cdot (-1) = 0.$$

vilket visar att den femte också är unitär. Den första matrisen har determinant -1 och spår $i\sqrt{2}$ vilket ger egenvärdena $i/\sqrt{2} \pm \sqrt{1/2} = (\pm 1 + i)/\sqrt{2}$. För den tredje matrisen har vi determinant 1 och spår $\sqrt{2}$ vilket ger egenvärdena $1/\sqrt{2} \pm i\sqrt{1/2} = (1 \pm i)/\sqrt{2}$.

Svar.

(a) De två sista är Hermiteska och egenvärdena är 0 och $\sqrt{2}$ respektive ± 1 .

(b) Den första, tredje och femte är unitära. Egenvärdena är $(\pm 1 + i)/\sqrt{2}$, $(1 \pm i)/\sqrt{2}$, respektive ± 1 .

3. Bestäm det största singulärvärdet och motsvarande höger- och vänstersingulära vektorer som hör till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

Lösningsförslag. Singulärvärdena är kvadratrötterna till egenvärdena av $A^T A$ och AA^T . Vi får att

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

vars karakteristiska ekvation är $x^2 - 18x + 65 = 0$, vilket ger $x = 9 \pm \sqrt{81 - 65} = 9 \pm 4$. Det största egenvärdet är 13. Alltså är det största singulärvärdet $\sigma_1 = \sqrt{13}$. Motsvarande egenvektor till $A^T A$ är $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Normerar vi den får vi den höger-singulära vektorn

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och när vi multiplicerar med A får vi

$$Ax = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

När vi normerar denna får vi

$$y = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som är motsvarande vänstersingulära vektor.

Svar. Det största singulärvärdet är $\sqrt{13}$ och motsvarande singulärvektorer är $x = (1/\sqrt{2}) \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ respektive $y = (1/\sqrt{26}) \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}^T$.

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Definiera begreppet *inre direkt summa av delrum*. (1 p)
- (b) Visa att om W är ett delrum av V så finns ett delrum U så att $U \oplus W = V$ som en inre direkt summa i fallet då $\dim V < \infty$. (1 p)
- (c) Visa att om $V = U \oplus W$ som inre direkt summa av delrum så är $V/U \cong W$. (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) $V = U \oplus W$ är en direkt summa av delrummen U och W om varje vektor i V på ett unikt sätt kan skrivas som en summa av en vektor från U och en vektor från W .
- (b) Om $\dim V = n$ och $\dim W = m$ kan vi välja en bas $\{e_1, \dots, e_m\}$ för W och utvidga den till en bas för V genom att lägga till vektorer $\{e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_n\}$. För att se det kan vi använda induktion. Vi lägger till en vektor i taget så att mängden fortfarande är linjärt oberoende. Om det inte går måste alla vektorer i V vara linjärkombinationer av de vektorer vi redan har. Nu har vi att $V = W \oplus U$ där $U = \text{Span}\{e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_n\}$.
- (c) Om $V = U \oplus W$ kan vi bilda en linjär avbildning $L: V \rightarrow W$ genom $L(x+y) = x$ om $x \in U$ och $y \in W$. Detta går eftersom alla element i V kan skrivas på ett unikt sätt som $x+y$ på det viset. Nu är $L(x+y) = 0$ om och endast om $x = 0$, dvs om $x+y \in W$. Alltså är $\ker(L) = W$ och enligt isomorfisatsen är $V/U \cong V/\ker(L) = V/W$.

5. (a) Ge definitionen av en *inre produkt* på ett komplext vektorrum. (1 p)
- (b) Vad är det som gör att $C^0([0, 1], \mathbb{C})$, rummet av kontinuerliga komplexvärda funktioner på enhetsintervallet, med den inre produkten som ges av $\langle f|g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t) dt$ inte är ett Hilbertrum? (1 p)
- (c) Bevisa att en inre produkt på ett komplext vektorrum är unikt bestämd av normen. (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) En inre produkt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ är en seskvilinjär konjugatsymmetrisk positivt definit form, dvs en funktion $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ som uppfyller
- (i) $\langle x|y_1 + y_2 \rangle = \langle x|y_1 \rangle + \langle x|y_2 \rangle$
 - (ii) $\langle x|ay \rangle = a\langle x|y \rangle$
 - (iii) $\langle x_1 + x_2|y \rangle = \langle x_1|y \rangle + \langle x_2|y \rangle$
 - (iv) $\langle ax|y \rangle = \overline{a}\langle x|y \rangle$
 - (v) $\langle x|y \rangle = \overline{\langle y|x \rangle}$
 - (vi) $\langle x|x \rangle > 0$ om $x \neq 0$.
- (b) Rummet är inte fullständigt i och med att det finns följder av kontinuerliga funktioner som konvergerar mot en icke-kontinuerlig funktion, exempelvis en stegfunktion. ($f_n(x) = -1, 0 \leq x \leq 1/2 - 1/n, f_n(x) = n(x - 1/2), 1/2 - 1/n < x < 1/2 + 1/n, f_n(x) = 1, 1/2 + 1/n \leq x \leq 1$)
- (c) Vi kan återfå den inre produkten $\langle x|y \rangle$ från normerna av $x + y, x - y, x + iy$ och $x - iy$ genom att

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x|x \rangle + \langle x|y \rangle + \langle y|x \rangle + \langle y|y \rangle \\ \|x - y\|^2 &= \langle x|x \rangle - \langle x|y \rangle - \langle y|x \rangle + \langle y|y \rangle \\ \|x + iy\|^2 &= \langle x|x \rangle + i\langle x|y \rangle - i\langle y|x \rangle + \langle y|y \rangle \\ \|x - iy\|^2 &= \langle x|x \rangle - i\langle x|y \rangle + i\langle y|x \rangle + \langle y|y \rangle \end{aligned}$$

vilket ger

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x + iy\|^2 + i\|x - iy\|^2 = 4\langle x|y \rangle$$

och

$$\langle x|y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x + iy\|^2 + i\|x - iy\|^2}{4}.$$

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt $L: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ vara den linjära avbildning som ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

med avseende på standardbasen. Visa att $\cos(tL)$ är en väldefinierad operator på $\mathbb{C}^2$ för alla komplexa tal t och bestäm matrisen för denna operator med avseende på standardbasen.

(4 p)

Lösningsförslag. Eftersom elementen i $(tA)^n$ växer högst exponentiellt med n kommer potensserien $\exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} (tA)^n / n!$ att konvergera för alla t och därmed är detta matrisen för operatoren $\exp(tL)$. I detta fall har vi att $(A - I)^2 = 0$ vilket ger att

$$A^n = (I + A - I)^n = I^n + \binom{n}{1} I^{n-1} (A - I) + 0 = I + n(A - I)$$

och

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (I + n(A - I))}{n!} = I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} + (A - I) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^n}{n!} \\ &= Ie^t + (A - I)te^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} te^t = \begin{bmatrix} (1+t)e^t & -te^t \\ te^t & (1-t)e^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Därmed kan vi också beräkna $\cos(tA) = (\exp(itA) + \exp(-itA))/2$ och får

$$\begin{aligned} \cos(tA) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1+it)e^{it} & -ite^{it} \\ ite^{it} & (1-it)e^{it} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1-it)e^{-it} & ite^{-it} \\ -ite^{-it} & (1+it)e^{-it} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(t) - t \sin(t) & t \sin(t) \\ -t \sin(t) & \cos(t) + t \sin(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

vilket är matrisen för operatoren $\cos(tL)$. Vi kan kontrollera räkningarna genom att se att

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \cos(tA) &= \begin{bmatrix} -\cos(t) + t \sin(t) - 2 \cos(t) & 2 \cos(t) - t \sin(t) \\ -2 \cos(t) + t \sin(t) & -\cos(t) + 2 \cos(t) - t \sin(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 \cos(t) + t \sin(t) & 2 \cos(t) - t \sin(t) \\ -2 \cos(t) + t \sin(t) & \cos(t) - t \sin(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t) - t \sin(t) & t \sin(t) \\ -t \sin(t) & \cos(t) + t \sin(t) \end{bmatrix} = -A^2 \cos(tA) \end{aligned}$$

Svar. $\cos(tA) = \begin{bmatrix} \cos(t) - t \sin(t) & t \sin(t) \\ -t \sin(t) & \cos(t) + t \sin(t) \end{bmatrix}$

7. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ och definiera $L: V \rightarrow V$ genom

$$L(p(x)) = p(x) + p(\xi x) + p(\xi^2 x), \quad \forall p(x) \in V,$$

där $\xi = e^{2i\pi/3}$. Visa att L har två egenvärden λ_1 och λ_2 så att $V = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$.

(4 p)

Lösningsförslag. Vi ser hur det går med basvektorerna x^n för $n = 0, 1, 2, \dots$

$$L(x^n) = x^n + (\xi x)^n + (\xi^2 x)^n = (1 + \xi^n + \xi^{2n})x^n$$

Vi har att $\xi^3 = 1$, så $\xi^{3k} = 1$ för alla heltal k . När $n = 3k$ får vi att $1 + \xi^{3k} + \xi^{6k} = 1 + 1 + 1$.

Om $n = 3k + 1$ får vi

$$1 + \xi^{3k+1} + \xi^{6k+2} = 1 + \xi + \xi^2 = 0$$

och när $n = 3k + 2$ får vi

$$1 + \xi^{3k+2} + \xi^{6k+4} = 1 + \xi^2 + \xi = 0.$$

eftersom $\xi = e^{2i\pi/3} = -1/2 + i\sqrt{3}/2$ är en lösning till $x^2 + x + 1 = 0$.

Därmed får vi att $L(x^n) = 3x^n$ om $n = 3k$ och noll om $n = 3k + 1$ eller $3k + 2$. Vi har därmed egenrummet $E_3 = \text{Span}\{1, x^3, x^6, \dots\}$ och $E_0 = \text{Span}\{x, x^2, x^4, x^5, \dots\}$ och $V = E_0 \oplus E_3$ eftersom alla basvektorer x^n ligger i något av dessa två egenrum.

Svar. $V = E_0 \oplus E_3$ där $E_0 = \text{Span}\{x^{3k+1}, x^{3k+2}, k \geq 0\}$ och $E_3 = \text{Span}\{x^{3k}, k \geq 0\}$.

8. Bestäm A^{2019} då

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

har koefficienter i $\mathbb{Z}_7$.

(4 p)

Lösningsförslag. Vi ser på det karakteristiska polynomet $p_A(x) = x^2 + x + 3$. Detta har inga rötter vilket vi kan se genom att sätta in alla sju möjliga värden på x i $\mathbb{Z}_7$. Vi får $p_A(0) = 3$, $p_A(1) = 5$, $p_A(2) = 2$, $p_A(3) = 1$, $p_A(4) = 2$, $p_A(5) = 5$, $p_A(6) = 3$. Alltså kommer potenserna av A ligga i en kropp med $7^2 = 49$ element. Det betyder att $A^{48} = I$ och om vi beräknar resten av 2019 vid division med 48 får vi 3. Alltså är $A^{2019} = A^3$. Vi beräknar

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Svar. $A^{2019} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

9. Bestäm alla unitära stokastiska matriser (sannolikhetsmatriser) och avgör om de bildar en grupp under matrismultiplikation.

(4 p)

Lösningsförslag. Om vi har en unitär stokastisk matris har vi att varje kolonn har element som uppfyller att $0 \leq x_i \leq 1$, för $i = 1, 2, \dots, n$ och dessutom att $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ och $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Därmed är

$$0 = 1 - 1 = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.$$

Eftersom alla x_i är icke-negativa måste alla produkter vara 0, vilket ger att alla x_i utom en måste vara noll. Den sista måste vara ett. Alltså är varje kolonn en standardbasvektor. Eftersom matrisen ska vara inverterbar måste det vara en permutation av alla n standardbasvektorer.

Produkten av två sådana matriser är på nytt en sådan matris och de är alla inverterbara med inverser på samma form. Alltså bildar de en grupp under matrismultiplikation.