



SF1673 Analys i en variabel
Tentamen
Tisdagen den 14 januari 2020

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de fem första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del I. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	20	Grundläggande problem	15	16	16	16	16	16
II	12	Avancerade problem	0	0	2	4	6	8

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. (a) Ange definitionen av att en funktion $f(x)$ är kontinuerlig vid en punkt $x = a$.

(1 p)

- (b) För vilka reella tal a och b är funktionen

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} & x < 0, \\ b & x = 0, \\ e^{e^{-1/x}} & x > 0 \end{cases}$$

kontinuerlig på $\mathbb{R}$?

(3 p)

2. (a) Formulera Taylors formel kring 0.

(1 p)

- (b) Använd Taylors formel för att visa att

$$\left| e^x - \sin(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{e+1}{3!} |x|^3 \quad \text{där } |x| < 1.$$

(3 p)

3. Beräkna största och minsta värdet av funktionen $g(x) = (x^2 + 2x)^3$ för $x \in [-2, 1]$.

(4 p)

4. (a) Bestäm en primitiv funktion till funktionen $f(x) = \frac{1}{x(1+x)}$. **(2 p)**
(b) Beräkna volymen av den rotationskropp, som genereras då området mellan kurvan $y = \sin x$, och x -axeln där $x \in [0, \pi]$ roteras kring y -axeln. **(2 p)**

5. (a) För vilka reella tal p, q är den generaliserade integralen

$$\int_2^\infty \frac{x^2 + 1}{(x-2)^p x^q} dx$$

konvergent?

(2 p)

- (b) För vilka reella tal r är serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + 1)^r}$$

konvergent?

(2 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. (a) Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion. Ange definitionen av att $f(x)$ konvergerar mot L då x går mot a . **(1 p)**

- (b) Visa med hjälp av definitionen att $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{5}$ om $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. **(3 p)**

7. (a) Formulera *Analysens huvudsats* (inte *Insättningsformeln*) och bevisa den med hjälp av medelvärdessatsen för integraler och definitionen av derivata. **(2 p)**

- (b) Låt

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ \frac{\sin(t)}{t} & t > 0 \end{cases}$$

och definiera funktionen $\text{Si}(x) = \int_0^x f(t) dt$. Beräkna alla lokala maxpunkter till $\text{Si}(x)$ för $x \in [0, \infty)$. **(2 p)**

8. Låt $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion sådan att

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \text{för alla } x \in [1, \infty),$$

och låt $F : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definieras som

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(3x) - F(x)$$

om det konvergerar för varje sådan funktion f eller visa att det är divergent för något f .

(4 p)
