



Lösningsförslag till tentamen
5 april 2018

DEL I – BASALA PROBLEM

1. Låt $k = \{0, 1, a, 1 + a\}$ vara kroppen med fyra element.
- (a) Skriv upp additions- och multiplikationstabellerna för k . (2 p)
- (b) Bestäm en matris A med koefficienter i $\mathbb{Z}_2$ sådan att k kan representeras av matriserna $\{0, I, A, A + I\}$. (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Eftersom $4 = 2^2$ måste vi ha att k är ett vektorrum över $\mathbb{Z}_2$ och därmed $1 + 1 = 0$. Detta ger additionstabellen

+	0	1	a	$a + 1$
0	0	1	a	$a + 1$
1	1	0	$a + 1$	a
a	a	$a + 1$	0	1
$a + 1$	$a + 1$	a	1	0

Eftersom $a \neq 0$ är a inverterbar inversen kan inte vara 0 eller 1, varför vi måste ha $a^2 = 1$ eller $a(a + 1) = 1$. Om $a^2 = 1$ får vi $(a + 1)^2 = a^2 + 1 = 0$, som inte stämmer eftersom $a + 1$ också ska vara inverterbar. Alltså är $a(a + 1) = 1$ och vi får $a^2 = a + 1$ och $(a + 1)^2 = a$. Multiplikationstabellen blir därmed

$\cdot$	0	1	a	$a + 1$
0	0	0	0	0
1	0	0	a	$a + 1$
a	0	a	$a + 1$	1
$a + 1$	0	$a + 1$	1	a

- (b) Vi behöver en matris A som uppfyller $A^2 = A + I$ och därmed kan vi ta någon av matriserna

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Eftersom båda dessa har $x^2 + x + 1$ som minimalpolynom kommer $K = \{0, I, A, A + I\}$ att vara isomorf med k .

Svar.

- (a) Additions- och multiplikationstabellerna ges av

+	0	1	a	$a + 1$		$\cdot$	0	1	a	$a + 1$
0	0	1	a	$a + 1$	och	0	0	0	0	0
1	1	0	$a + 1$	a		1	0	0	a	$a + 1$
a	a	$a + 1$	0	1		a	0	a	$a + 1$	1
$a + 1$	$a + 1$	a	1	0		$a + 1$	0	$a + 1$	1	a

- (b) Matrisen A kan väljas bland $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

2. Låt $V = P_5$ vara polynom i x av grad högst 5 med komplexa koefficienter. Definiera produkten av polynom i V som den vanliga produkten, men där vi bortser från termer som har grad 6 eller högre i produkten. Operatoren $L: V \rightarrow V$ definieras av multiplikation med polynomet $x^5 - x^4 + x^3$.

- (a) Bestäm en bas för kärnan $\ker(L)$. (2 p)
(b) Bestäm en bas för bildrummet $\operatorname{im}(L)$. (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Om vi väljer basen $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ för V får L matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De tre första kolonnerna är linjärt oberoende och de tre sista är noll. Det innebär att kärnan $\ker(L)$ ges av delrummet som spänns upp av de tre sista basvektorerna, $\{x^3, x^4, x^5\}$.

- (b) Eftersom de tre första kolonnerna i matrisen är linjärt oberoende och spänner upp kolonnrummet har vi att bilderna av de tre första basvektorerna utgör en bas för bildrummet. Vi kan utföra kolonnoperationer som överför dessa på de tre sista basvektorerna basvektorerna, $\{x^3, x^4, x^5\}$ som därmed utgör en bas för bildrummet.

Observera att vi kan se att $L^2 = 0$ eftersom $(x^3 - x^4 + x^5)^2 = 0$ i V och därmed är $\operatorname{im}(L) \subseteq \ker(L)$. Eftersom $\dim \ker(L) = 3$ har vi enligt dimensionssatsen att $\dim \operatorname{im}(L) = \dim V - \dim \ker(L) = 6 - 3 = 3$. Alltså är $\operatorname{im}(L) = \ker(L)$.

Svar.

- (a) $\{x^3, x^4, x^5\}$ är en bas för $\ker(L)$.
(b) $\{x^3, x^4, x^5\}$ är en bas för $\operatorname{im}(L)$.

3. Bestäm singularvärden och singularvektorer till matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

Lösningsförslag. Vi beräknar $A^\dagger A$ och $AA^\dagger$ och får

$$A^\dagger A = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad AA^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Därmed är båda singularvärdena $\sqrt{2}$. Vi kan välja standardbasen för de högersingulära vektorerna och får

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

som motsvarande vänstersingulära vektorer.

Eftersom B är Hermiteisk har den en ortogonal bas av egenvektorer och därmed är dessa egenvektorer singularvektorer med beloppen av motsvarande egenvärden som singularvärden. Det karakteristiska polynomet är $p_B(x) = x^2 - \text{Tr} B x + \det(B) = x^2 - 2x$. Alltså är egenvärdena 0 och 2 med egenvektorer som ges av

$$\ker \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{respektive} \quad \ker \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{bmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Svar. Singularvärdena till A är $\sqrt{2}$ och $\sqrt{2}$ med singularvektorer som ges av t.ex. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

till höger och $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ till vänster. Singularvärdena till B är 2 och 0 med samma singularvektorer, $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ till höger som till vänster.

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Betrakta operatorer L på ett ändligdimensionellt vektorrum V .
- (a) Definiera begreppen *minimalpolynom* och *karaktäristiskt polynom*. (1 p)
 - (b) Ge ett par belysande exempel på klasser av operatorer där minimalpolynomet inte är lika med det karaktäristiska polynomet. (1 p)
 - (c) Visa att alla egenvärden till en operator måste vara nollställen både till minimalpolynomet och till det karaktäristiska polynomet. (1 p)
 - (d) Vad säger Cayley-Hamiltons sats och vad kan man dra för slutsats från den om relationen mellan minimalpolynomet och det karaktäristiska polynomet? (1 p)

Lösningsförslag.

- (a) Minimalpolynomet är det moniska polynom av lägsta grad som uppfyller $q(L) = 0$. Det karaktäristiska polynomet ges av $p_L(x) = \det(xI - L) = \det(xI - A)$, där A är matrisen för L med avseende på någon bas.
- (b) För speglingar gäller alltid att $L^2 = I$, så det karaktäristiska polynomet ges av $x^2 - 1$. Det karaktäristiska polynomet har grad n om L är en spegling i ett n -dimensionellt inre produktrum.
Nilpotenta avbildningar har minimalpolynom x^m för något m . Om L inte är en nilpotent operator på ett n -dimensionellt rum är det karaktäristiska polynomet x^n . Dessa är bara lika om Jordanformen för L bara innehåller ett block.
- (c) Om $q_L(L) = 0$ och $Lv = \lambda v$ får vi $0 = q_L(L)v = q_L(\lambda)v$. Eftersom $v \neq 0$ om det är en egenvektor måste $q_L(\lambda) = 0$.
Vi har också att $Lv = \lambda v$ är detsamma som att $(L - \lambda I)v = 0$ och eftersom $v \neq 0$ måste $\det(L - \lambda I) = 0$, dvs $p_L(\lambda) = 0$.
- (d) Cayley-Hamiltons sats säger att $p_L(L) = 0$ där $p_L(x)$ är det karaktäristiska polynomet för L . Det innebär att $p_L(x)$ måste vara delbart med minimalpolynomet $q_L(x)$ eftersom division med $q_L(x)$ ger

$$p_L(x) = s(x)q_L(x) + r(x)$$

där $r(x) = 0$ eller $\deg r(x) < \deg q_L(x)$. Eftersom $0 = p_L(L) = s(L)q_L(L) + r(L)$ får vi $r(L) = 0$ som ger att $r(x) = 0$ på grund av att $q_L(x)$ har lägsta möjliga grad bland polynom som är noll på L .

5. Låt V och W vara ändligdimensionella vektorrum.

- (a) Definiera tensorprodukten $V \otimes W$. (1 p)
- (b) Visa att $\dim V \otimes W = (\dim V)(\dim W)$. (1 p)
- (c) Visa att det finns en naturlig bilinjär avbildning $\Phi: V \times W \longrightarrow V \otimes W$. (1 p)
- (d) Tensorprodukten $V \otimes W$ har tillsammans med den bilinjära avbildningen från del (c) en universell egenskap med avseende på bilinjära avbildningar $V \times W \longrightarrow U$, nämligen att alla sådana faktoriserar på ett entydigt sätt via Φ . Förklara vad detta innebär och skissera ett bevis för att detta gäller. (1 p)

Lösningsförslag.

(a) Vi kan definiera

$$V \otimes W = \{f: V^* \times W^* \longrightarrow k \mid f \text{ är bilinjär}\}$$

där V^* och W^* är de duala rummen till V respektive W .

(b) För baser $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ för V och $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ för W kan vi definiera $e_i \otimes f_j \in V \otimes W$ genom

$$(e_i \otimes f_j)(\phi, \psi) = \phi(e_i)\psi(f_j), \quad \forall (\phi, \psi) \in V^* \times W^*.$$

Varje element i $V \otimes W$ kan nu skrivas på ett unikt sätt som

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} e_i \otimes f_j$$

med $a_{ij} = f(e_i^*, f_j^*)$ där $\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_m^*\}$ och $\{f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*\}$ är de duala baserna. Alltså har $V \otimes W$ en bas som består av $mn = (\dim V)(\dim W)$ element.

(c) Vi kan definiera $\Phi: V \times W \longrightarrow V \otimes W$ genom $\Phi(x, y)(\phi, \psi) = \phi(x)\psi(y)$. Detta ger för varje (x, y) en bilinkär form på $V^* \times W^*$ och om vi fixerar y är den linjär i x eftersom ϕ är linjär och om vi fixerar x är den linjär i y eftersom ψ är linjär. Ett annat sätt att definiera samma bilinjära avbildning är genom

$$\Phi(x, y) = \Phi\left(\sum_{i=1}^m a_i e_i, \sum_{j=1}^n b_j f_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j e_i \otimes f_j.$$

(d) Den universella egenskapen innebär att om $\Psi: V \times W \longrightarrow U$ finns en bilinjär avbildning, så finns en entydig linjär avbildning $L: V \otimes W \longrightarrow U$ så att $\Psi = L \circ \Phi$. Vi kan bevisa det genom att definiera

$$L(e_i \otimes f_j) = \Psi(e_i, f_j), \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Denna är väldefinierad eftersom $\{e_1 \otimes f_j, e_m \otimes f_n\}$ utgör en bas för $V \otimes W$. Den uppfyller att $\Psi = L \circ \Phi$ eftersom

$$\begin{aligned} \Psi\left(\sum_{i=1}^m a_i e_i, \sum_{j=1}^n b_j f_j\right) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j \Psi(e_i, f_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j L(e_i \otimes f_j) \\ &= L\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j e_i \otimes f_j\right) = L\left(\Phi\left(\sum_{i=1}^m a_i e_i, \sum_{j=1}^n b_j f_j\right)\right) \end{aligned}$$

Att L är entydig ser vi genom att använda $\Psi = L \circ \Phi$ på $e_i \otimes f_j$, vilket ger att $L(e_i \otimes f_j) = \Psi(e_i, f_j)$.

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet som består av polynom i en variabel med komplexa koefficienter. Definiera den inre produkten $\langle \cdot | \cdot \rangle$ så att $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ bildar en ortonormal bas för V . Låt $L: V \rightarrow \mathbb{C}$ vara den linjära avbildning som ges av $L(p(x)) = p(1)$ och låt $W = \ker(L)$.

(a) Bestäm en ortogonal bas för W . (3 p)

(b) Bestäm en bas för $W^\perp$. (1 p)

Lösningsförslag.

- (a) Vi använder Gram-Schmidts metod utgående från basen $\{1 - x, x - x^2, \dots, x^i - x_{i+1}, \dots\}$. Vi kan skriva $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i(x^i - x^{i+1})$ och enligt Gram-Schmidts metod ska $\langle p_n(x) | x^i - x^{i+1} \rangle = 0$ för $i = 0, 1, \dots, n-1$. Detta ger $2a_0 - a_1 = 0$, $-a_0 + 2a_1 - a_2 = 0, \dots, -a_{n-2} + 2a_{n-1} + a_n = 0$. Om vi sätter $a_0 = 1$ får vi $a_1 = 2$, $a_2 = 2a_1 - a_0 = 4 - 1 = 3$, $a_i = 2a_{i-1} - a_{i-2} = 2i - (i-1) = i+1$. Därmed är

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n (i+1)(x^i - x^{i+1}) = 1 + x + \dots + x^n - (n+1)x^{n+1}.$$

- (b) $W^\perp = \{0\}$ eftersom $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ligger i $W^\perp$ betyder att $a_i = a_{i+1}$ för alla $i \geq 0$ eftersom $x^i - x^{i+1} \in W$ och $\langle p(x) | x^i - x^{i+1} \rangle = a_i - a_{i+1}$. Alltså är tomma mängden en bas för $W^\perp$.

Svar.

- (a) $\{1 + x + \dots + x^n - (n+1)x^{n+1}\}_{n \geq 0}$ utgör en ortogonal bas för W .
(b) Tomma mängden, $\emptyset$, utgör en bas för $W^\perp$.

7. För en linjär operator L på V kan vi bilda en linjär operator på $V \otimes V$ genom $I \otimes L - L \otimes I$, där I är identitetsoperatoren på V .

(a) Bestäm rangen för $I \otimes L - L \otimes I$ om L ges av matrisen (2 p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Visa att $I \otimes L - L \otimes I$ är nilpotent om L är nilpotent, men att det omvända inte alltid gäller. (2 p)

Lösningsförslag.

(a) Vi väljer först en annan bas där matrisen för L blir diagonalmatris. Egenvärdena för L är 5 och -1 . Matrisen för $I \otimes L - L \otimes I$ blir då diagonalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

om vi ordnar basen för $V \otimes V$ som $\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$. Rangen är två.

(b) Om L är nilpotent är $L^m = 0$, för något heltal m . Vi har att

$$(I \otimes L - L \otimes I)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k L^k \otimes L^{n-k}$$

och detta är noll om $n \geq 2m$ eftersom varje term då är noll.

Om L är nilpotent kan vi se på $(I + L)$ som är inverterbar, men vi får

$$\otimes(I + L) - (I + L) \otimes I = I \otimes I + I \otimes L - I \otimes I - L \otimes I = I \otimes L - L \otimes I$$

som är nilpotent.

Svar.

(a) Rangen av $I \otimes L - L \otimes I$ är två.

8. En *derivation* på $\mathbb{C}[x]$ med avseende på ett komplext tal a är en linjär avbildning

$$D: \mathbb{C}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$$

som uppfyller

$$D(f(x)g(x)) = g(a)D(f(x)) + f(a)D(g(x)),$$

för alla $f(x)$ och $g(x)$ i $\mathbb{C}[x]$.

- (a) Visa att mängden av derivationer på $\mathbb{C}[x]$ med avseende på a bildar ett vektorrum $\text{Der}_a(\mathbb{C}[x])$. (1 p)
- (b) Bestäm dimensionen av $\text{Der}_a(\mathbb{C}[x])$, exempelvis genom att använda hur derivationerna verkar på en lämpligt vald bas för $\mathbb{C}[x]$. (3 p)

Lösningsförslag.

- (a) $\text{Der}_a(\mathbb{C}[x])$ är en delmängd av det duala rummet $(\mathbb{C}[x])^*$, så det räcker att visa att det är ett delrum. Vi har att nollavbildningen uppfyller kraven, så $\text{Der}_a(\mathbb{C}[x])$ är inte tomt. Vidare ger varje par av polynom $(f(x), g(x))$ i $\mathbb{C}[x] \times \mathbb{C}[x]$ en linjär ekvation som ska vara uppfylld. Alltså är $\text{Der}_a(\mathbb{C}[x])$ ett delrum av $(\mathbb{C}[x])^*$ eftersom det är lösningsmängden till en mängd linjära ekvationer.
- (b) Vi kan tillämpa villkoret på $f(x) = (x - a)^n$ och $g(x) = (x - a)$ för att se att

$$D((x - a)^{n+1})D((x - a)^n \cdot (x - a)) = 0^n \cdot D(x - a) + 0 \cdot D((x - a)^n)$$

vilket ger att $D((x - a)^n) = 0$ för $n \geq 2$. Vidare kan vi använda relationen på $1 = 1 \cdot 1$ för att få

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = 1 \cdot D(1) + 1 \cdot D(1) = 2D(1)$$

vilket ger $D(1) = 0$ eftersom 2 är inverterbart i $\mathbb{C}$. Det återstår att se vad som är möjligt för $D(x - a)$. Om vi väljer $D(x - a) = c$ får vi att $D(f(x)) = D(\sum_{i=0}^n a_i (x - a)^i) = a_1 c = f'(a)c$. Vi vet att derivatan i punkten a uppfyller kravet ovan enligt Leibnitz regel. Alltså har vi att $\text{Der}_a(\mathbb{C}[x])$ är endimensionellt med en bas som ges av derivationen $D_a(f(x)) = f'(a)$.

Svar.

- (b) $\dim \text{Der}_a(\mathbb{C}[x]) = 1$.

9. Visa att $\det A \geq 0$ för alla reella antisymmetriska matriser A . (4 p)

Lösningsförslag. Matrisen iA är Hermitesk i och med att A är reell och anti-symmetrisk. Eftersom iA är diagonaliserbar med reella egenvärden har A inga reella egenvärden utom 0.

De komplexa egenvärdena till A förekommer i konjugerade par och är alla rent imaginära. Determinanten av A är produkten av egenvärdena och blir 0 om något egenvärde är noll. Annars måste egenvärdena kunna ordnas som $\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2, \dots, \lambda_n, \bar{\lambda}_n\}$ och produkten blir

$$\det A = \lambda_1 \cdot \bar{\lambda}_1 \cdot \lambda_2 \cdot \bar{\lambda}_2 \cdots \lambda_n \cdot \bar{\lambda}_n = |\lambda_1|^2 \cdot |\lambda_2|^2 \cdots |\lambda_n|^2 > 0$$

Ett annat alternativ är att se på det karaktäristiska polynomet $p_A(x) = \det(xI - A)$ som uppfyller att $p_A(x) > 0$ för $x \gg 0$. Om $p_A(x)$ har udda grad måste det finnas ett nollställe och det måste vara 0 eftersom A inte har några reella egenvärden utom noll. Om $p_A(x)$ har jämn grad måste $p_A(x) > 0$ för alla $x \neq 0$ och får vi att $\det A = p_A(0) \geq 0$.