



**Lösningsförslag till tentamen
10 januari 2018**

DEL I – BASALA PROBLEM

1. Bestäm Jordans normalform för den operator på $\mathbb{C}^2$ som ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & i\sqrt{2} \\ 2i\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

Lösningsförslag. Vi beräknar det karakteristiska polynomet som

$$p_A(x) = x^2 - \text{Tr}(A)x + \det(A) = x^2 - 2x + (-3 + 4) = (x - 1)^2.$$

Eigenvärdena är därmed 1 och om A skulle vara diagonaliserbar skulle vi ha $A = I$. Alltså är Jordans normalform

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svar. Jordans normalform ges av $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet som ges av alla polynom i x med komplexa koefficienter och låt $W = \{p(x) \in V : p(1) = p(-1) = 0\}$.

(a) Bestäm en linjär avbildning $L: V \rightarrow U$ så att $W = \ker(L)$.

(1 p)

(b) Bestäm en bas för V/W .

(3 p)

Lösningsförslag.

(a) Vi får en linjär avbildning $L: V \rightarrow \mathbb{C}^2$ där $W = \ker(L)$ genom

$$L(p(x)) = \begin{bmatrix} p(1) \\ p(-1) \end{bmatrix}, \quad \forall p(x) \in V.$$

Den är linjär eftersom $ap(x) + bq(x) \mapsto [ap(1) + bq(1) \quad ap(-1) + bq(-1)]^T = a[p(1) \quad p(-1)]^T + b[q(1) \quad q(-1)]^T$,

(b) Därmed har vi att $\text{im}(L) \cong V/W$. L är surjektiv eftersom $L(1) = [1 \quad 1]^T$ och $L(x) = [1 \quad -1]^T$ är två linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{C}^2$. Alltså är $V/W \cong \mathbb{C}^2$ och vi kan välja två linjärt oberoende vektorer som bas, exempelvis

$$\{1 + W, x + W\}.$$

Svar.

- (a) $L: V \rightarrow \mathbb{C}^2$ där $L(p(x)) = [p(1) \quad p(-1)]^T$ för $p(x) \in V = \mathbb{C}[x]$.
(b) $\{1 + W, x + W\}$ utgör en bas för V/W .

3. Bestäm pseudoinversen till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

Lösningsförslag. Vi kan skriva matrisen som

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Vi behöver normera vektorerna för att få en ortonormal bas. Längderna är $\sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$ och $\sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$.

$$A^+ = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{14}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{70} A^T.$$

Svar. $A^+ = \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{70} A^T.$

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Låt V vara ett komplext inre produktrum och L en operator på V .

(a) Hur definieras den *adjungerade operatoren* $L^\dagger$?

(1 p)

(b) Hur kan man visa att den adjungerade operatoren existerar då $\dim V < \infty$?

(1 p)

(c) Ge ett belysande exempel på ett inre produktrum V och en operator L som inte är självadjungerad, men där både L och $L^\dagger$ är naturliga operatorer.

(2 p)

Lösningsförslag.

(a) $L^\dagger$ är den operator som uppfyller $\langle L^\dagger(x)|y \rangle = \langle x|L(y) \rangle$ för alla $x, y \in V$.

(b) Vi kan välja en ortonormal bas $\{e_i\}$ för V och då kan vi bestämma $L^\dagger$ som den operator vars matris är komplexa konjugatet av transponatet till matrisen för L .

(c) Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet av polynom med inre produkt som ges av $\langle p(x)|q(x) \rangle = \sum_{i=0}^d \overline{p^{(i)}(0)} q^{(i)}(0)$ och låt $L = d/dx$, dvs $L(p(x)) = p'(x)$. Då är $\{1, x, x^2/2!, \dots, x^d/d! \dots\}$ en ortonormal bas för V och får vi den adjungerade operatoren av matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

vilket motsvarar operatoren

$$L^\dagger(p(x)) = \int_0^x p(t) dt, \quad \text{för } p(x) \text{ i } V.$$

5. (a) Vad är en sannolikhetsmatris? (1 p)
- (b) Alla sannolikhetsmatriser har 1 som ett egenvärde. Hur bevisar man det? (1 p)
- (c) Formulera någon version av Perron-Frobenius sats. (1 p)
- (d) Ge ett exempel som visar att $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ inte behöver existera även om A är en irreducibel sannolikhetsmatris. (1 p)

Lösningsförslag.

- (a) En sannolikhetsmatris är en reell kvadratisk matris där alla element är icke-negativa och summorna av elementen i varje kolonn är ett.
- (b) Villkoret att summan i kolonnerna är 1 betyder att $e = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ är en vänstereigenvektor med egenvärde 1, dvs att $eA = e$. Det betyder att $A^T e^T = e^T$, så 1 är ett egenvärde till A^T , men eftersom $\det(xI - A^T) = \det(xI - A)$ har A och A^T samma egenvärden. Därmed är 1 ett egenvärde till A .
- (c) En version av Perron-Frobenius sats är

Sats 1. Om A är en irreducibel icke-negativ matris gäller följande där

$$\rho = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ är egenvärde till } A\}.$$

- (i) A har en unik¹ icke-negativ egenvektor med egenvärde ρ .
- (ii) De komplexa egenvärden som har belopp ρ är enhetsrötter gånger ρ och ligger på jämna intervall kring cirkeln med radie ρ kring origo.

och en enklare är

Sats 2. Låt A vara en sannolikhetsmatris där alla element i A^m är positiva för något m . Då gäller följande

- (i) Det finns en egenvektor med egenvärde 1 där alla koordinater är positiva.
- (ii) $m_a(1) = m_g(1) = 1$
- (iii) Om $\lambda \neq 1$ är ett egenvärde gäller att $|\lambda| < 1$.

- (d) Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

är en irreducibel sannolikhetsmatris men vi har att

$$A^n = \begin{cases} I & \text{om } n \text{ är jämnt,} \\ A & \text{om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

så följderna $\{A^n\}_{n \geq 0}$ konvergerar inte.

¹upp till positiv multipel

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. På Hilbertrummet $\ell_2(\mathbb{C}) = \{\{a_j\}_{j \geq 0} : a_j \in \mathbb{C}, \forall j \geq 0 \text{ och } \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty\}$ definierar vi en operator L genom $L(\{a_j\}_{j \geq 0}) = \{b_j\}_{j \geq 0}$ där

$$b_j = \begin{cases} -a_{j+1} & \text{om } j \text{ är jämnt,} \\ a_{j-1} & \text{om } j \text{ är udda.} \end{cases}$$

Kontrollera att $L(\{a_j\}_{j \geq 0})$ tillhör $\ell_2(\mathbb{C})$ om $\{a_j\}_{j \geq 0}$ gör det och bestäm alla egenvärden, egenvektorer och singulärvärden till operatoren L .

(4 p)

Lösningsförslag. Vi har en Hilbertrumsbas för $\ell_2(\mathbb{C})$ som ges av $\{\{\delta_{ij}\}_{i \geq 0}\}_{j \geq 0}$ och vi har att

$$L(\{\delta_{ij}\}_{j \geq 0}) = \begin{cases} \{\delta_{(i+1)j}\}_{j \geq 0} & \text{om } i \text{ är jämnt,} \\ -\{\delta_{(i-1)j}\}_{j \geq 0} & \text{om } i \text{ är udda.} \end{cases}$$

Det betyder att L så när som på tecken permuterar elementen i basen och därmed bevaras längden och bilden ligger i $\ell_2(\mathbb{C})$.

Om λ är ett egenvärde till L söker vi lösningar till

$$\begin{cases} -a_{2i+1} &= \lambda a_{2i} \\ a_{2i} &= \lambda a_{2i+1} \end{cases}$$

Genom att sätta in i nästa får vi $a_{2i+1} = -\lambda^2 a_{2i+1}$ och $a_{2i} = -\lambda^2 a_{2i}$. Därmed är egenvärdena lösningarna till $\lambda^2 = -1$, dvs $\lambda = \pm i$ och vi får egenvektorer som kan skrivas

$$(ib_0, b_0, ib_1, b_1, ib_2, b_2, \dots)$$

och

$$(-ib_0, b_0, -ib_1, b_1, -ib_2, b_2, \dots)$$

där $\{b_j\}_{j \geq 0}$ ligger i $\ell_2(\mathbb{C})$.

Vi har att L är unitär eftersom L så när som på tecken permuterar elementen i den ortogonala Hilbertrumsbasen för $\ell_2(\mathbb{C})$ som ges av $\{e^{(i)}\}_{i \geq 0}$ där $e^{(i)} = \{\delta_{ij}\}_{j \geq 0}$, för $i \geq 0$. Alltså är alla singulärvärdena 1 eftersom dessa är kvadratrötterna av egenvärdena till $L^\dagger L = I$.

Svar. Egenvärdena är $\pm i$ och egenvektorerna $(\pm ib_0, b_0, \pm ib_1, b_1, \pm ib_2, b_2, \dots)$ där $\{b_j\}_{j \geq 0}$ ligger i $\ell_2(\mathbb{C})$. Singulärvärdena är 1.

7. Låt $V \subseteq \mathbb{C}^3$ vara delrummet som ges av ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ och betrakta tensorprodukten $V \otimes V$ som ett delrum i $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$. Avgör om någon av tensorerna

$$e_1 \otimes e_3 + e_2 \otimes e_1 - 2e_3 \otimes e_2$$

eller

$$e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_3$$

ligger i $V \otimes V$, där e_1, e_2, e_3 är standardbasvektorerna för $\mathbb{C}^3$.

(4 p)

Lösningsförslag. Dimensionen av V är 2 och vi kan välja en bas som består av $e_1 - e_2$ och $e_2 - e_3$. Därmed spänns $V \otimes V$ upp av de fyra tensorerna

$$\begin{aligned}(e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) &= e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2, \\(e_1 - e_2) \otimes (e_2 - e_3) &= e_1 \otimes e_2 - e_1 \otimes e_3 - e_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_3, \\(e_2 - e_3) \otimes (e_1 - e_2) &= e_2 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_2, \\(e_2 - e_3) \otimes (e_2 - e_3) &= e_2 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_3 - e_3 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3.\end{aligned}$$

Vi har att $e_1 \otimes e_1$ bara förekommer i den första basvektorn, $e_1 \otimes e_3$ bara i den andra, $e_3 \otimes e_1$ bara i den tredje och $e_3 \otimes e_3$ bara i den fjärde. För att uttrycka $e_1 \otimes e_3 + e_2 \otimes e_1 - 2e_3 \otimes e_2$ med hjälp av basvektorerna behöver alla koefficienter vara noll utom den andra eftersom ingen av de tre tensorerna $e_1 \otimes e_1$, $e_3 \otimes e_1$ eller $e_3 \otimes e_3$ förekommer i den givna tensorn. Eftersom tensorn inte är en multipel av den andra basvektorn ligger den inte i $V \otimes V$.

När vi ser på den andra tensorn behöver koefficienterna för basvektorerna vara 1, 0, 0 och -1 och vi har att

$$e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_3 = (e_1 - e_2) \otimes (e_1 - e_2) - (e_2 - e_3) \otimes (e_2 - e_3)$$

som alltså ligger i $V \otimes V$.

Svar. Den första ligger inte i $V \otimes V$, men den andra gör det.

8. Låt K vara delmängden av $M_2(\mathbb{Z}_7)$ som ges av

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_7 \right\}.$$

Visa att K bildar en kropp med 49 element och lös ekvationerna $x^2 + 2x + 2 = 0$ respektive $x^6 = 1$ i K .

(4 p)

Lösningsförslag. Enligt en sats i materialet om ändliga kroppar räcker det att se att minimalpolynomet till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

är irreducibelt. Vi har att $\{A, I\}$ är linjärt oberoende, men $A^2 = -I$. Därmed är minimalpolynomet $q_A(x) = x^2 + 1$. Detta är irreducibelt om det inte finns några linjära faktorer, dvs inte några nollställen. Vi provar alla element i $\mathbb{Z}_7$ och får att

$$q_A(0) = 1, q_A(1) = 2, q_A(2) = 5, q_A(3) = 3, q_A(4) = 3, q_A(5) = 5 \text{ och } q_A(6) = 2.$$

Eftersom det inte fanns något nollställe är $q_A(x)$ irreducibelt och K är en kropp med 49 element då det finns 7×7 möjligheter för a och b i $\mathbb{Z}_7$.

Vi kan lösa den första ekvationen genom att kvadratkomplettera och får då

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \iff (x + 1)^2 + 1 = 0$$

Eftersom $A^2 = -I$ har vi att $x = -I \pm A$ är en lösningarna till ekvationen. Därmed kan vi skriva de båda lösningarna som

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

För att lösa den andra ekvationen kan vi konstatera att $a^6 = 1$ för varje nollskilt element a i primkroppen $k = \mathbb{Z}_7$. Detta måste vara alla lösningar eftersom $x^6 = 1$ kan ha högst sex lösningar. Vi kan också faktorisera polynomet $x^6 - 1$ som

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

och kvadratkomplettera $x^2 + x + 1 = (x + 4)^2 - 1 = (x + 5)(x + 3)$ och $x^2 - x + 1 = (x + 3)^2 - 1 = (x + 4)(x + 2)$. Därmed ges lösningarna av $I, 2I, 3I, 4I, 5I$ oh $6I$

Svar. Lösningarna till $x^2 + 2x + 2 = 0$ är $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ och lösningarna till $x^6 = 1$ är $I, 2I, 3I, 4I, 5I$ oh $6I$.

9. Inom *grafteori* används *grannmatriser* och deras egenvärden. En *graf* är en mängd *hörn* och en mängd *kanter* som går mellan par av hörn. Grannmatrisen för en graf med hörn $\{1, 2, \dots, n\}$ är den symmetriska $n \times n$ -matris som ges av

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om det går en kant mellan hörnen } i \text{ och } j, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Betrakta cykelgrafen C_n med n hörn där det går en kant mellan hörn i och hörn $i + 1$ för $i = 1, 2, \dots, n - 1$, men också en kant mellan hörn 1 och hörn n . Bestäm egenvärdena för grannmatrisen för C_n . (Ledning: Matrisen kan skrivas som $B + B^T$ där $B^n = I$.)

(4 p)

Lösningsförslag. Låt A vara grannmatrisen för C_n . Vi kan skriva $A = B + B^T$ där

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j + 1 \text{ eller } i = j + 1 - n, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Denna matris svarar mot den riktade cykliska grafen och vi har att $B^n = I$ och $B^T = B^{-1}$ eftersom kolonnerna utgör en ortonormal bas. Över de komplexa talen är både J och A diagonaliserbara och de kommuterar eftersom $A = B + B^{-1}$. Alltså finns en gemensam bas av egenvektorer och egenvärdena för A ges av $\lambda + 1/\lambda$ där λ är ett egenvärde till B . Minimalpolynomet till B är $q_B(x) = x^n - 1$ vilket ger att egenvärdena är $e^{ij2\pi/n}$, för $j = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Alltså ges egenvärdena till A av $e^{ij2\pi/n} + e^{-ij2\pi/n} = 2 \cos(2\pi j/n)$, för $j = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. För $j > n/2$ får vi samma egenvärde som för $n - j$ eftersom $\cos(x) = \cos(2\pi - x)$. Alltså får vi dubbla egenvärden för $0 < j < n/2$.

Svar. Egenvärdena ges av $2 \cos(2\pi j/n)$, för $0 \leq 2j \leq n$ där de som ligger mellan -2 och 2 är dubbla.