

TENTAMEN TEORETISK FYSIK SI1155

Måndag 2022-08-18 kl 08:00-13:00

Skriv på varje sida	Namn och problemnummer
Motivera noga	Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag
Hjälpmedel	BETA, miniräknare, formelblad på skrivningens sida 3-5
Poängsättning	6 poäng per problem
Examinator	Mats Wallin tel 073 765 2000

1. En spin-1 partikel är i tillståndet

$$|\chi\rangle = N \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestäm värdet på normeringskonstanten N .

(b) Vid en mätning av S_z , vilka resultat kan fås och med vilka sannolikheter fås dessa? Beräkna $\langle S_z \rangle$.

(c) Beräkna $\langle S_x \rangle$.

2. En endimensionell harmonisk oscillator är vid tiden $t = 0$ i tillståndet

$$|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n\rangle + i|n+1\rangle)$$

där $|n\rangle, |n+1\rangle$ är energiegentillstånd. Bestäm $|\Psi(t)\rangle$ och beräkna positionsväntevärdet $\langle x \rangle$ vid tiden t .

3. En endimensionell harmonisk oscillator med elektrisk laddning q störs av ett svagt tidsberoende elektriskt fält i x-riktningen. Den störande potentialen är

$$V = -qx E e^{-t/\tau}$$

där E och τ är konstanter. Om oscillatoren är i grundtillståndet vid tiden $t = 0$, bestäm sannolikheten att den är i tillståndet n vid tiden $t = \infty$.

VÄND!

4. I Mermins version av Bells olikhet mäts spinnen i tillståndet

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\uparrow\uparrow - \downarrow\downarrow\downarrow)$$

i tre rumsligt separerade mätstationer. Vilka resultat fås om

(a) $\sigma_x\sigma_y\sigma_y$ mäts?

(b) $\sigma_x\sigma_x\sigma_x$ mäts?

σ är Paulimatriser som ges av $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

Förklara varför mätvärdena inte kan vara förutbestämda innan mätningen utförs.

5. Ur den relativistiska Diracekvationen uppstår en ny störning i väteatomen som kallas Darwintermen och ges av

$$V = -\frac{1}{8m^2c^2}[\mathbf{p}\cdot, [\mathbf{p}, V^0(r)]]$$

där $\cdot$ betecknar skalärprodukt mellan rörelsemängdsoperatorerna, $V^0(r)$ är Coulomb-potentialen och $[\dots]$ betecknar kommutatorn. Beräkna första ordningens korrekationer till väteenergierna.

LYCKA TILL!

LÖSNINGAR

1. En spin-1 partikel är i tillståndet

$$|\chi\rangle = N \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestäm värdet på normeringskonstanten N .

(b) Vid en mätning av S_z , vilka resultat kan fås och med vilka sannolikheter fås dessa? Beräkna $\langle S_z \rangle$.

(c) Beräkna $\langle S_x \rangle$.

(a)

$$\langle \psi | \psi \rangle = |N|^2(1 + 1 + 4 + 9) = 15|N|^2 = 1$$

Välj $N = \sqrt{15}$.

(b) Möjliga mätvärden: $S_z = 0, \pm\hbar$. Sannolikheter:

$$P(\hbar) = 2/15, \quad P(0) = 4/15, \quad P(-\hbar) = 9/15 = 3/5$$

Kontroll: $P(\hbar) + P(0) + P(-\hbar) = 2/15 + 4/15 + 9/15 = 1$. OK.

$$\langle S_z \rangle = \hbar \cdot 2/15 + 0 \cdot 4/15 - \hbar \cdot 9/15 = -\hbar \cdot 7/15$$

(c)

$$\langle S_x \rangle = \langle \chi | S_x | \chi \rangle = \frac{1}{15}(1-i, 2, 3) \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \hbar \frac{16}{15\sqrt{2}}$$

2. En endimensionell harmonisk oscillator är vid tiden $t = 0$ i tillståndet

$$|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n\rangle + i|n+1\rangle)$$

där $|n\rangle, |n+1\rangle$ är energiegentillstånd. Bestäm $|\Psi(t)\rangle$ och beräkna positionsväntevärdet $\langle x \rangle$ vid tiden t .

Energivåerna $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$ ger

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} + i|n+1\rangle e^{-iE_{n+1} t/\hbar}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_n t/\hbar} (|n\rangle + i|n+1\rangle e^{-i\omega t})$$

Positionsväntevärde vid tiden t :

$$\begin{aligned}\langle x(t) \rangle &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\langle n| - i\langle n+1| e^{+i\omega t}) (a^\dagger + a) (|n\rangle + i|n+1\rangle e^{-i\omega t}) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (-ie^{+i\omega t} \langle n+1| a^\dagger |n\rangle + ie^{-i\omega t} \langle n| a |n+1\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar(n+1)}{2m\omega}} (-ie^{+i\omega t} + ie^{-i\omega t}) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar(n+1)}{2m\omega}} \sin(\omega t)\end{aligned}$$

3. En endimensionell harmonisk oscillator med elektrisk laddning q störs av ett svagt tidsberoende elektriskt fält i x-riktningen. Den störande potentialen är

$$V = -qx E e^{-t/\tau}$$

där E och τ är konstanter. Om oscillatoren är i grundtillståndet vid tiden $t = 0$, bestäm sannolikheten att den är i tillståndet n vid tiden $t = \infty$.

Tidsberoende störningsräkning:

$$P_n = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^\infty e^{i\omega_0 t} \langle n|V|0\rangle dt \right|^2 = \frac{q^2 E^2}{\hbar^2} |\langle n|x|0\rangle|^2 \left| \int_0^\infty e^{i\omega_0 t} e^{-t/\tau} dt \right|^2$$

där $\hbar\omega_0 = E_n - E_0 = n\hbar\omega$. Beräkna matriselementet:

$$\langle n|x|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle n|a^\dagger + a|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \delta_{n,1}$$

Beräkna tidsintegralen:

$$\int_0^\infty e^{(i\omega - 1/\tau)t} dt = \frac{-1}{i\omega_0 - 1/\tau}$$

Absolutbelopp i kvadrat:

$$\left| \frac{-1}{i\omega - 1/\tau} \right|^2 = \frac{1}{\omega^2 + 1/\tau^2}$$

SVAR:

$$P_1 = \frac{q^2 E^2}{2\hbar m \omega} \frac{1}{\omega^2 + 1/\tau^2}, \quad P_{n>1} = 0$$

4. I Mermin's version av Bells olikhet mäts spinnen i tillståndet

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\uparrow\uparrow - \downarrow\downarrow\downarrow)$$

i tre rumsligt separerade mätstationer. Vilka resultat fås om

(a) $\sigma_x\sigma_y\sigma_y$ mäts?

(b) $\sigma_x\sigma_x\sigma_x$ mäts?

σ är Paulimatriser som ges av $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.

Förklara varför mätvärdena inte kan vara förutbestämda innan mätningen utförs.

Följande resultat behövs:

$$\sigma_x \uparrow = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \downarrow$$

$$\sigma_x \downarrow = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \uparrow$$

$$\sigma_y \uparrow = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i \downarrow$$

$$\sigma_y \downarrow = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -i \uparrow$$

Kvantmekaniken ger följande resultat:

(a)

$$\begin{aligned} \sigma_x\sigma_y\sigma_y|\chi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_x \uparrow)(\sigma_y \uparrow)(\sigma_y \uparrow) - (\sigma_x \downarrow)(\sigma_y \downarrow)(\sigma_y \downarrow)] = \frac{1}{\sqrt{2}}(\downarrow i \downarrow i \downarrow - \uparrow (-i) \uparrow (-i) \uparrow) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\downarrow\downarrow\downarrow + \uparrow\uparrow\uparrow) = |\chi\rangle \end{aligned}$$

dvs mätning av $\sigma_x\sigma_y\sigma_y$ i egentillståndet $|\chi\rangle$ ger egenvärdet +1 som svar.

(b)

$$\sigma_x\sigma_x\sigma_x|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_x \uparrow)(\sigma_x \uparrow)(\sigma_x \uparrow) - (\sigma_x \downarrow)(\sigma_x \downarrow)(\sigma_x \downarrow)] = \frac{1}{\sqrt{2}}(\downarrow\downarrow\downarrow - \uparrow\uparrow\uparrow) = -|\chi\rangle$$

dvs mätning av $\sigma_x\sigma_x\sigma_x$ i egentillståndet $|\chi\rangle$ ger egenvärdet -1 som svar.

Inställningen A motsvarar en mätning av σ_x och B av σ_y . Om mätningarna ger $ABB = BAB = BBA = 1$ så måste $AAA = 1$ enligt alla lokala realistiska dolda variabelteorier. Alltså kan inte kvantmekaniken reproduceras av en sådan teori.

5. Ur den relativistiska Diracekvationen uppstår en ny störning i väteatomen som kallas Darwintermen och ges av

$$V = -\frac{1}{8m^2c^2}[\mathbf{p} \cdot, [\mathbf{p}, V^0(r)]]$$

där $\cdot$ betecknar skalärprodukt mellan rörelsemängdsoperatorerna, $V^0(r)$ är Coulomb-potentialen och [...] betecknar kommutatorn. Beräkna första ordningens korrekationer till väteenergierna.

Första ordningens korrektion till energin i vätetillståndet Ψ_{nlm} är

$$E_{nlm}^1 = \langle nlm|V|nlm\rangle = -\frac{1}{8m^2c^2}\langle nlm|[\mathbf{p} \cdot, [\mathbf{p}, V^0(r)]]|nlm\rangle$$

Beräkna kommutatorerna. Skalärprodukten betyder (sätt $f = V^0$)

$$[\mathbf{p} \cdot, [\mathbf{p}, f]] = [p_x, [p_x, f]] + [p_y, [p_y, f]] + [p_z, [p_z, f]]$$

Första termen blir

$$[p_x, f]\psi = \underbrace{p_x(f\psi)}_{=(p_x f)\psi + f p_x \psi} - f p_x \psi = (p_x f)\psi \Rightarrow [p_x, f] = p_x f$$

Detta ger vidare

$$[p_x, [p_x, f]] = p_x^2 f$$

Sammanlagt fås

$$[\mathbf{p} \cdot, [\mathbf{p}, f]] = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)f = \mathbf{p}^2 f$$

Detta ger

$$[\mathbf{p} \cdot, [\mathbf{p}, V^0(r)]] = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} V^0(r) = -\hbar^2 \nabla^2 \left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = \hbar^2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \nabla^2 \frac{1}{r} = -\hbar^2 \frac{e^2}{\epsilon_0} \delta(r)$$

mha Poissons ekvation $\nabla^2 1/r = -4\pi\delta(r)$. Sammanlagt blir

$$E_{nlm}^1 = \langle nlm|V|nlm\rangle = \frac{\hbar^2 e^2}{8m^2 c^2 \epsilon_0} \int d^3r |\Psi_{nlm}|^2 \delta(r) = \frac{\hbar^2 e^2}{8m^2 c^2 \epsilon_0} |\Psi_{nlm}(0)|^2$$

Eftersom väteegenfunktionerna innehåller en faktor r^l (se föreläsningsanteckning 7 sid 6-7) så kommer endast tillstånd Ψ_{nlm} med $l = 0$ att vara $\neq 0$ i $r = 0$ vilket ger den enda nollskilda korrekturen för $l = m = 0$:

$$E_{n00}^1 = \frac{\hbar^2 e^2}{8m^2 c^2 \epsilon_0} |\Psi_{n00}(0)|^2$$

Vi stannar här.

Kommentar: Man kan visa att

$$\Psi_{n00}(0) = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{1}{na} \right)^{3/2}$$

Detta ger

$$E_{n00}^1 = \frac{\hbar^2}{2m^2 c^2} \frac{1}{n^3 a^3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$