

Lösningar till problemtentamen, SG1113, 27/10, 2023

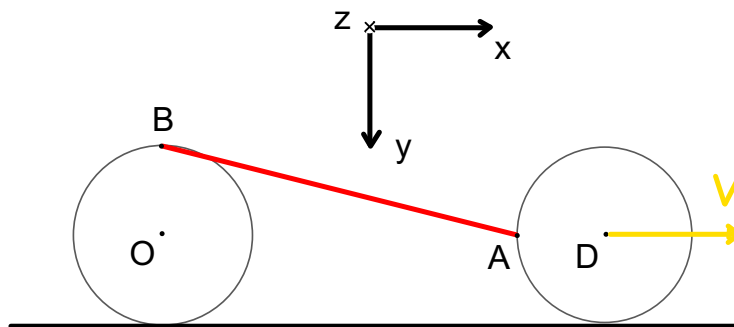
Tillåtna hjälpmedel: Penna, suddgummi, linjal, passare och gradskiva. Inget annat.

1. Beteckna det högra hjulets vinkelhastighet med $\omega_0 = \omega_0 \mathbf{e}_z$. Eftersom det rullar utan glidning gäller att $\omega_0 = v/r$. Beteckna det vänstra hjulets vinkelhastighet med $\omega_2 = \omega_2 \mathbf{e}_z$. Det vänstra hjulets centrum O rör sig på konstant höjd r över underlaget. Dess hastighet kan därför skrivas $\mathbf{v}_O = v_O \mathbf{e}_x$. Eftersom det rullar utan glidning gäller att $\omega_2 = v_O/r$. Beteckna armens vinkelhastighet med $\omega_1 = \omega_1 \mathbf{e}_z$. Sambandsformeln för hastighet ger

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_D + \omega_0 \times \mathbf{r}_{DA} = v \mathbf{e}_x + \frac{v}{r} \mathbf{e}_z \times (-r \mathbf{e}_x) = v \mathbf{e}_x - v \mathbf{e}_y \\ \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \omega_1 \times \mathbf{r}_{AB} = v \mathbf{e}_x - v \mathbf{e}_y + \omega_1 \mathbf{e}_z \times (-4r \mathbf{e}_x - r \mathbf{e}_y) = \\ &= (v + \omega_1 r) \mathbf{e}_x - (v + 4\omega_1 r) \mathbf{e}_y \quad (1) \\ \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_O + \omega_2 \times \mathbf{r}_{OB} = v_O \mathbf{e}_x + \omega_2 \mathbf{e}_z \times (-r \mathbf{e}_y) = 2v_O \mathbf{e}_x \quad (2)\end{aligned}$$

(1) = (2) ger

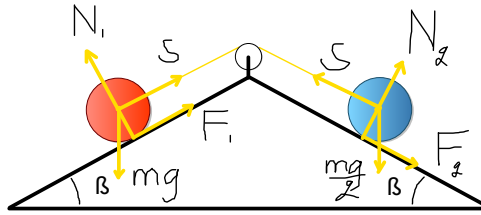
$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{1}{4} \frac{v}{r} \\ 2v_O &= v + \omega_1 r = \frac{3}{4}v \Rightarrow v_O = \frac{3}{8}v\end{aligned}$$



2. Låt den vänstra cylindern ha massan m och den högra $m/2$, och låt båda cylindrarna ha radien r . Frilägg de båda cylindrarna och rita ut krafterna, som i figuren. Låt den vänstra cylindern ha accelerationen a , parallellt med det vänstra planet, snett nedåt vänster. Då har den högra cylindern samma acceleration, parallellt med det högra planet, snett uppåt vänster. Newtons andra lag ger

$$ma = mg \sin \beta - S - F_1 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}ma = -\frac{1}{2}mg \sin \beta + S - F_2 \quad (4)$$



Beteckna beloppet av den vänstra cylinderns vinkelaccelerationen med α . Den högra cylinderns vinkelacceleration har samma belopp. Den vänstra cylindern har tröghetsmomentet $I_G^v = mr^2/2$ och den högra $I_G^h = mr^2/4$. Eftersom hjulen rullar utan glidning gäller att $\alpha r = a$. Momentekvationen ger nu

$$I_G^v \alpha = F_1 r \Rightarrow F_1 = \frac{1}{2} m a \quad (5)$$

$$I_G^h \alpha = F_2 r \Rightarrow F_2 = \frac{1}{4} m a \quad (6)$$

(5) och (6) insatta i (3) och (4) ger

$$\frac{3}{2} m a = m g \sin \beta - S \quad (7)$$

$$\frac{3}{4} m a = -\frac{1}{2} m g \sin \beta + S \quad (8)$$

(7) + (8) ger

$$\frac{9}{4} a = \frac{1}{2} g \sin \beta \Rightarrow a = \frac{2}{9} g \sin \beta \quad (9)$$

Alternativ lösning med hjälp av Lagranges ekvation. Låt x vara koordinaten för den vänstra cylinderns masscentrum, riktad snett nedåt längs det vänstra planet. Båda cylindrarna har vinkelhastigheten $\omega = \dot{x}/r$. Systemets kinetiska energi är

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_G^v \omega^2 + \frac{1}{2} I_G^h \omega^2 = \frac{9}{8} m \dot{x}^2 \quad (10)$$

och systemets potentiella energi är

$$V = -m \sin \beta x + \frac{1}{2} m \sin \beta x = -\frac{1}{2} m \sin \beta x. \quad (11)$$

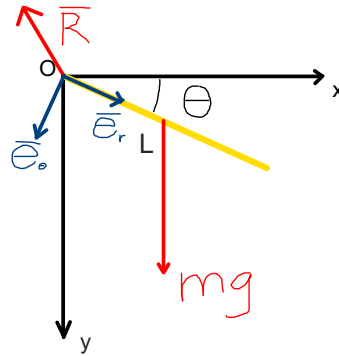
Lagrangianen är

$$L = T - V = \frac{9}{8} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m g \sin \beta x. \quad (12)$$

Lagrange ekvation kan nu skrivas

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mg \sin \beta - \frac{9}{4}m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \frac{2}{9}g \sin \beta \quad (13)$$

3. Frilägg och rita ut krafter som i figuren. Newtons andra lag ger



$$m(\ddot{r}_G - r_G \dot{\theta}^2) = R_r + mg \sin \theta \quad (14)$$

$$m(r_G \ddot{\theta} + 2\dot{r}_G \dot{\theta}) = R_\theta + mg \cos \theta \quad (15)$$

Med $r_G = L/2$ (konstant) fås

$$R_r = -\frac{1}{2}mL\dot{\theta}^2 - mg \sin \theta \quad (16)$$

$$R_\theta = \frac{1}{2}mL\ddot{\theta} - mg \cos \theta \quad (17)$$

Stångens kinetiska energi kan skrivas $T = I_O \dot{\theta}^2 / 2 = mL^2 \dot{\theta}^2 / 6$ och dess potentiella energi $V = -mgl \sin \theta / 2$. Initialt är den totala mekaniska energin lika med noll. Vi får alltså

$$\frac{1}{6}mL^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgL \sin \theta = 0 \Rightarrow L\dot{\theta}^2 = 3g \sin \theta \quad (18)$$

Derivering av (18) ger

$$2L\dot{\theta}\ddot{\theta} = 3g \cos \theta \dot{\theta} \Rightarrow L\ddot{\theta} = \frac{3}{2}g \cos \theta \quad (19)$$

Insättning av (18) i (16) och (19) i (17) ger

$$R_r = -\frac{5}{2}mg \sin \theta \quad (20)$$

$$R_\theta = -\frac{1}{4}mg \cos \theta \quad (21)$$

Vi kan också skriva reaktionskraftens x - och y -komponenter som

$$R_x = \cos \theta R_r - \sin \theta R_\theta = -\frac{9}{4}mg \cos \theta \sin \theta = -\frac{9}{8}mg \sin(2\theta) \quad (22)$$

$$R_y = \sin \theta R_r + \cos \theta R_\theta = -\frac{1}{4}mg(10 - 9 \cos^2 \theta) \quad (23)$$

Dessa uttryck kan också härledas direkt genom att ställa upp Newtons andra lag i x - och y -led

$$m\ddot{x}_G = R_x \quad (24)$$

$$m\ddot{y}_G = R_y + mg \quad (25)$$

och använda

$$\ddot{x}_G = -\frac{L}{2} \cos \theta \dot{\theta}^2 - \frac{L}{2} \sin \theta \ddot{\theta} \quad (26)$$

$$\ddot{y}_G = -\frac{L}{2} \sin \theta \dot{\theta}^2 + \frac{L}{2} \cos \theta \ddot{\theta} \quad (27)$$

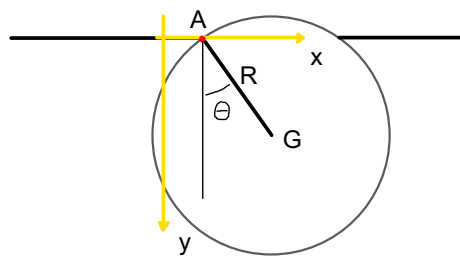
samt (18) och (19).

4. Inför de generaliserade koordinaterna $x_A = x$ och θ . Masscentrums koordinater är då

$$x_G = x + R \sin \theta \quad (28)$$

$$y_G = R \cos \theta \quad (29)$$

Skivans kinetiska energi kan skrivas



$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m((\dot{x} + R \cos \theta \dot{\theta})^2 + (R \sin \theta \dot{\theta})^2) + \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta}^2 = \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mR \cos \theta \dot{x} \dot{\theta} + \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (30)$$

och dess potentiella energi kan skrivas

$$V = -mgR \cos \theta \quad (31)$$

och Lagrangianen är följaktligen

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mR \cos \theta \dot{\theta} + \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR \cos \theta \quad (32)$$

Lagrange ekvationer kan nu skrivas

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow \ddot{x} - R \sin \theta \dot{\theta}^2 + R \cos \theta \ddot{\theta} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}R\ddot{\theta} + \cos \theta \ddot{x} + g \sin \theta = 0 \quad (34)$$

För små svängningar kring jämviktsläget kan de icke linjära termerna försummas och vi kan göra approximationerna $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$. Detta ger $\ddot{x} = -R\ddot{\theta}$ och svängningsekvationen

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{R}\theta = 0 \quad (35)$$

med frekvensen

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{R}} \quad (36)$$