



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Lösningsförslag till tentamen
Tisdag den 24 oktober 2023

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Lös följande initialvärdesproblem för $y = y(x)$ och bestäm lösningarnas existensintervall.

$$(a) \quad xy' - y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}, \quad y(-1) = 0, \quad (b) \quad y' = e^{-y} \cos x, \quad y(0) = 0.$$

(4 p)

Lösningsförslag. (a) Detta är en första ordningens linjär ekvation som kan lösas genom att multiplicera med en integrerande faktor. Vi skriver ekvationen som

$$y' - x^{-1}y = \frac{x}{\sqrt{1-x}},$$

så att vi ser att en integrerande faktor ges av

$$e^{\int -x^{-1} dx} = e^{-\ln x} = x^{-1}.$$

När vi multiplicerar med den integrerande faktorn får vi ekvationen

$$x^{-1}y' - x^{-2}y = \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

där vänsterledet är derivatan av en produkt,

$$(x^{-1}y)' = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Vi integrerar detta och får

$$x^{-1}y = \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \{\text{Formelblad (19)}\} = -2\sqrt{1-x} + C.$$

Eftersom $y(-1) = 0$ har vi

$$(-1) \cdot 0 = -2\sqrt{1-(-1)} + C$$

så $C = 2\sqrt{2}$ och lösningen till initialvärdesproblemet är

$$y(x) = x \left(-2\sqrt{1-x} + 2\sqrt{2} \right) = 2x \left(\sqrt{2} - \sqrt{1-x} \right).$$

Lösningen är definierad och deriverbar så länge $1-x > 0$, eller $x < 1$. Existensintervallet för lösningen med initialvillkor i $x = -1$ är alltså intervallet $-\infty < x < 1$.

(b) Detta är en separabel ekvation vilken vi skriver om som

$$e^y y' = \cos x.$$

Vi integrerar med avseende på x och gör substitutionen $y = y(x)$ i vänsterledet och får

$$e^y = \int e^y dy = \int e^y y' dx = \int \cos x dx = \sin x + C.$$

Initialvillkoret $y(0) = 0$ ger att

$$1 = e^0 = \sin 0 + C = 0 + C$$

så $C = 1$ och lösningen ges av

$$e^y = \sin x + 1.$$

eller

$$y = \ln(\sin x + 1).$$

Lösningen är definierad så länge $\sin x + 1 > 0$, eller $\sin x > -1$, eller $\sin x \neq -1$, eller $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ där n är ett heltal. Det största intervall där lösningen är definierad och som innehåller $x = 0$ är $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, vilket alltså är existensintervallet för lösningen.

□

2. Den homogena ekvationen $t^2 y'' - 3ty' + 3y = 0$ där $y = y(t)$ för $t > 0$ har två lösningar $y_1(t) = t^3$ och $y_2(t) = t$. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$t^2 y'' - 3ty' + 3y = t^4 e^t.$$

(4 p)

Lösningsförslag. Vi använder metoden med variation av parametrar. Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen är

$$y_c(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 t^3 + c_2 t.$$

För variation av parametrar gör vi ansatsen

$$y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = u_1(t)t^3 + u_2(t)t.$$

Derivatan av detta är

$$y' = u_1' t^3 + u_2' t + 3u_1 t^2 + u_2$$

Vi antar att

$$u_1' t^3 + u_2' t = 0$$

så att

$$y' = 3u_1 t^2 + u_2.$$

Detta ger

$$y'' = 3u_1' t^2 + u_2' + 6u_1 t.$$

Insatt i ekvationen får vi

$$\begin{aligned} t^4 e^t &= t^2 y'' - 3ty' + 3y \\ &= t^2 (3u_1' t^2 + u_2' + 6u_1 t) \\ &\quad - 3t (3u_1 t^2 + u_2) + 3(u_1 t^3 + u_2 t) \\ &= 3u_1' t^4 + u_2' t^2 \\ &\quad + u_1 (6t^3 - 9t^3 + 3t^3) + u_2 (-3t + 3t) \\ &= 3u_1' t^4 + u_2' t^2. \end{aligned}$$

Funktionerna $u_1(t), u_2(t)$ ska alltså uppfylla

$$\begin{cases} 3u_1' t^4 + u_2' t^2 &= t^4 e^t \\ u_1' t^3 + u_2' t &= 0 \end{cases},$$

eller

$$\begin{cases} 3u_1' t^2 + u_2' &= t^2 e^t \\ u_1' t^2 + u_2' &= 0 \end{cases},$$

Vi löser ut $u_1'(t), u_2'(t)$ och får

$$u_1' = \frac{1}{2} e^t, \quad u_2' = -\frac{1}{2} t^2 e^t.$$

Detta integreras till (se formelblad (54))

$$u_1(t) = \frac{1}{2} e^t + C_1, \quad u_2(t) = -\frac{1}{2} (t^2 - 2t + 2) e^t + C_2.$$

Den allmänna lösningen till ekvationen är alltså

$$\begin{aligned}y(t) &= u_1(t)t^3 + u_2(t)t \\&= \left(\frac{1}{2}e^t + C_1\right)t^3 + \left(-\frac{1}{2}(t^2 - 2t + 2)e^t + C_2\right)t \\&= C_1t^3 + C_2t + (t^2 - t)e^t.\end{aligned}$$

□

3. Matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ har ett dubbelt egenvärde $r = 2$. Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t).$$

(4 p)

Lösningförslag. Ansatsen $\mathbf{x}(t) = e^{rt} \xi$ ger en lösning om ξ är en egenvektor till $\mathbf{A}$ med egenvärde r . Egenvektorer ξ med det givna egenvärdet $r = 2$ ges av

$$\mathbf{0} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) \xi = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \xi.$$

Vi hittar en egenvektor $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och en lösning

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Då det ej finns fler linjärt oberoende egenvektorer gör vi ansatsen $\mathbf{x}(t) = te^{rt} \xi + e^{rt} \eta$ vilket ger en lösning om

$$rte^{rt} \xi + e^{rt} \xi + re^{rt} \eta = \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(te^{rt} \xi + e^{rt} \eta) = te^{rt} \mathbf{A}\xi + e^{rt} \mathbf{A}\eta$$

det vill säga om

$$\mathbf{A}\xi = r\xi \quad \text{och} \quad \mathbf{A}\eta - r\eta = \xi,$$

vilket betyder att ξ är en egenvektor till $r = 2$, och η är en så kallad generaliserad egenvektor. Vi väljer $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ som ovan, och ska därefter lösa ekvationen $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\eta = \xi$ eller

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \eta = \left(\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - 2\mathbf{I} \right) \eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En lösning till denna ekvation är $\eta = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$, så

$$\mathbf{x}_2(t) = te^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} t - 1/3 \\ t \end{pmatrix}.$$

är en andra lösning till systemet av differentialekvationer. Den allmänna lösningen ges av

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_1(t) + c_2 \mathbf{x}_2(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} t - 1/3 \\ t \end{pmatrix}$$

där c_1, c_2 är konstanter.

□

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. Följande autonoma system för $(x, y) = (x(t), y(t))$ har båda en kritisk punkt i origo. Använd linjärisering eller metoden med Lyapunovfunktion för att avgöra om den är (asymptotiskt) stabil eller instabil.

$$(a) \quad \begin{cases} x' = x - 3y + y^3 \\ y' = -x - 2xy^2 \end{cases}, \quad (b) \quad \begin{cases} x' = -x^3 + y^3 \\ y' = -y - 2xy^2 \end{cases}.$$

(4 p)

Lösningsförslag. (a) Systemet

$$\begin{cases} x' = F(x, y) = x - 3y + y^3 \\ y' = G(x, y) = -x - 2xy^2 \end{cases}$$

har en kritisk punkt i origo. Linjärisering där ger motsvarande linjära system

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)y = x - 3y \\ y' = \frac{\partial G}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial G}{\partial y}(0, 0)y = -x \end{cases}.$$

med matris $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Eigenvärdena för detta linjära system ges av

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1-r & -3 \\ -1 & -r \end{pmatrix} = (r-1)r - 3 = r^2 - r - 3 = (r - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 3 = (r - \frac{1}{2})^2 - \frac{13}{4}$$

och de är

$$r_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{13}), \quad r_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{13}).$$

Detta är två reella egenvärden med olika tecken, så det linjära systemet beskriver en sadelpunkt, som är instabil. Enligt sats om linjärisering har det ursprungliga autonoma systemet också en instabil kritisk punkt i origo.

(b) För detta system ges linjäriseringen i origo av matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ som har determinant noll, så linjärisering kan inte ge någon information om den kritiska punkten. Vi använder istället metoden med Lyapunovfunktion. Vi testar med en Lyapunovfunktion på formen

$$V(x, y) = Ax^2 + By^2$$

där $A, B > 0$. Med detta antagande är $V(x, y)$ alltid en positivt definit funktion. Vi måste välja A, B så att $V(x, y)$ är strikt avtagande längs lösningskurvor till systemet som startar nära $(0, 0)$. För en sådan lösningskurva beräknar vi

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= 2Ax(-x^3 + y^3) + 2By(-y - 2xy^2) \\ &= -2Ax^4 + (2A - 4B)xy^3 - 2By^2. \end{aligned}$$

Eftersom $A, B > 0$ så är första och tredje termen ickepositiva. Om vi väljer $A = 2$ och $B = 1$ så är $2A - 4B = 0$, och den andra termen försvinner. Funktionen

$$V(x, y) = 2x^2 + y^2$$

är alltså positivt definit i origo (den punkten är ett lokalt min), och

$$\dot{V}(x, y) = \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = -4x^4 - 2y^2 < 0$$

i alla punkter utom i origo. Vi drar slutsatsen att $(0,0)$ är en asymptotiskt stabil kritisk punkt.



5. Differentialekvationen

$$(x^2 + 3)y'' - 2y = 0, \quad y = y(x),$$

har två lösningar y_1, y_2 som uppfyller $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ respektive $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$. Bestäm dessa lösningar på serieform vid $x = 0$,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna a_n samt beräkna termer till minst ordning 3 i vardera serie. Hur stor är konvergensraden för de två serierna? **(4 p)**

Lösningsförslag. Med

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

får vi

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Insatt i ekvationen ger detta

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2 + 3)y'' - 2y \\ &= (x^2 + 3) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n + 3 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

För att få likartade termer i serierna så substituerar vi $k = n - 2$ i den mittersta termen och $k = n$ i de andra två. Detta ger

$$0 = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k + 3 \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Sedan plockar vi ut termerna av ordning 0 och 1, så att alla serier börjar med $k = 2$. Vi får då

$$0 = (6a_2 - 2a_0) + (18a_3 - 2a_1)x + \sum_{k=2}^{\infty} (k(k-1)a_k + 3(k+2)(k+1)a_{k+2} - 2a_k) x^k.$$

För att ge en lösning till systemet måste alltså koefficienterna a_n uppfylla sambanden

$$0 = 6a_2 - 2a_0$$

$$0 = 18a_3 - 2a_1$$

$$0 = k(k-1)a_k + 3(k+2)(k+1)a_{k+2} - 2a_k, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

Här kan den sista ekvationen skrivas om till

$$3(k+2)(k+1)a_{k+2} = -(k(k-1) - 2)a_k = -(k^2 - k - 2)a_k = -(k+1)(k-2)a_k$$

eller

$$a_{k+2} = -\frac{k-2}{3(k+2)} a_k$$

eftersom $k + 1 \neq 0$. Rekursionsrelationen för koefficienterna a_n förenklas alltså till

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{3}a_0 \\ a_3 &= \frac{1}{9}a_1 \\ a_{k+2} &= -\frac{k-2}{3(k+2)}a_k, \quad k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

För lösningen y_1 gäller

$$\begin{aligned} a_0 = y_1(0) &= 1, \quad a_1 = y_1'(0) = 0, \quad a_2 = \frac{1}{3}a_0 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{1}{9}a_1 = 0, \\ a_4 &= -\frac{2-2}{4(2+1)}a_2 = 0, \quad a_5 = -\frac{3-2}{3(3+2)}a_3 = 0, \end{aligned}$$

och detta fortsätter med alla termer $a_k = 0$.

För lösningen y_2 har vi

$$\begin{aligned} a_0 = y_2(0) &= 0, \quad a_1 = y_2'(0) = 1, \quad a_2 = \frac{1}{3}a_0 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{9}a_1 = \frac{1}{9}, \\ a_4 &= -\frac{2-2}{3(2+2)}a_2 = 0, \quad a_5 = -\frac{3-2}{3(3+2)}a_3 = -\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{9} = -\frac{1}{135}, \quad \dots \end{aligned}$$

och detta fortsätter med alla jämna termer $a_{2m} = 0$.

Vi har alltså hittat de två lösningarna

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + \frac{1}{3}x^2, \\ y_2(x) &= x + \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{135}x^5 + \dots \end{aligned}$$

Om vi skriver om den givna differentialekvationen till

$$y'' - \frac{2}{x^2+3}y = 0$$

ser vi att punkten $x = 0$ är en ordinär punkt. Enligt resultat i kursboken (Sats 5.3.1) är konvergensraden till en serielösning vid $x = 0$ minst lika med konvergensraden för (den enda) koefficientfunktionen $-\frac{2}{x^2+3}$. Denna funktion är analytisk och har konvergensradie fram till närmaste (komplexa) punkt där den inte är definierad. Det är i punkter där $x^2 + 3 = 0$, eller punkterna $x = \pm\sqrt{3}i$. Avstånd från origo till dessa punkter är $\sqrt{3}$, vilket alltså är en undre begränsning på konvergensraden.

Vi kan också beräkna konvergensraden med hjälp av kvottestet. Eftersom lösningen y_2 bara består av udda termer har vi

$$y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1}x^{2m+1}.$$

För kvottestet beräknar vi

$$Q = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2(m+1)+1}x^{2(m+1)+1}}{a_{2m+1}x^{2m+1}} \right| = x^2 \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2m+3}}{a_{2m+1}} \right| = x^2 \lim_{m \rightarrow \infty} \left| -\frac{(2m+1)-2}{3((2m+1)+2)} \right| = \frac{x^2}{3}.$$

Serien för y_2 konvergerar om $Q < 1$ och divergerar om $Q > 1$, eller den konvergerar för $|x| < \sqrt{3}$ och divergerar för $|x| > \sqrt{3}$.

Eftersom serien för y_1 är ändlig konvergerar den för alla x .

□

6. Picards sats säger att initialvärdesproblemet $y' = f(t, y)$, $y(0) = 0$, har en unik lösning $y = \phi(t)$. Förutsättningen är att funktionen f och dess partiella derivata $\partial f / \partial y$ är kontinuerliga på ett rektangulärt område R som innehåller i origo.
- (a) Beviset går ut på att skriva problemet som en integralekvation och sedan konstruera en följd av approximativa lösningar $y = \phi_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, där $\phi_0(t) = 0$. Förklara hur detta går till. Beräkna även $\phi_3(t)$ då $f(t, y) = 1 + ty$.
- (b) Visa entydigheten, alltså att om $\phi(t)$, $\psi(t)$ är lösningar till initialvärdesproblemet så är $\phi(t) = \psi(t)$.

(4 p)

Lösningsförslag. (a) Se kursboken avsnitt 2.8.

Integralekvationen

$$\phi(t) = \int_0^t f(s, \phi(s)) ds$$

är ekvivalent med det givna initialvärdesproblemet.

I beviset av Picards sats definieras en följd $\phi_n(t)$ av approximativa lösningar genom $\phi_0(t) = 0$ och

$$\phi_n(t) = \int_0^t f(s, \phi_{n-1}(s)) ds, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Med $f(t, y) = 1 + ty$ ger detta

$$\phi_1(t) = \int_0^t f(s, \phi_0(s)) ds = \int_0^t f(s, 0) ds = \int_0^t (1 + s \cdot 0) ds = t,$$

$$\begin{aligned} \phi_2(t) &= \int_0^t f(s, \phi_1(s)) ds = \int_0^t f(s, s) ds \\ &= \int_0^t (1 + s^2) ds = \left[s + \frac{s^3}{3} \right]_0^t = t + \frac{1}{3}t^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_3(t) &= \int_0^t f(s, \phi_2(s)) ds = \int_0^t f\left(s, s + \frac{1}{3}s^3\right) ds \\ &= \int_0^t \left(1 + s\left(s + \frac{1}{3}s^3\right)\right) ds = \left[s + \frac{s^3}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{s^5}{5}\right]_0^t = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{15}t^5. \end{aligned}$$

(b) Se kursboken avsnitt 2.8, sid 89 samt problem 18.

□