



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
11 januari 2021

Skrivtid: 14:00–19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: David Rydh

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Det går dock inte att få mer än 12 respektive 8 poäng på dessa delar. Betygsgränserna vid tentamen kommer preliminärt att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del/hela skrivningen.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Grundläggande problem	-	-	-	-	-	-
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	-	-	-	-	-	-
hela	36		11	12	18	22	26	30

Till exempel krävs för betyg C minst 22 poäng totalt varav 6 poäng på del II.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ vara vektorrummet av kontinuerligt deriverbara funktioner $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Låt $V = \text{Span}\{\sin x, \cos x, e^x, e^{-x}\}$ och låt $L: V \rightarrow V$ vara operatoren som ges av

$$L(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f'(x)) - f(0)e^x.$$

- (a) Bestäm en bas för bilden $\text{im } L$. (2 p)
(b) Är V en inre direkt summa av kärnan $\ker L$ och bilden $\text{im } L$? (2 p)

2. Låt $\mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet av polynom med komplexa koefficienter med inre produkt

$$\langle p(x) | q(x) \rangle = \int_0^1 \overline{p(x)} q(x) dx, \quad \text{för alla } p(x), q(x) \text{ i } \mathbb{C}[x].$$

Bestäm den ortogonala projektionen av $x^2 + x + 1$ på delrummet $V = \text{Span}\{1, x\}$. (4 p)

3. Låt $\mathbb{C}$ vara de komplexa talen betraktat som ett reellt vektorrum.

- (a) Vad är dimensionen av tensorprodukten $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$? (1 p)
(b) Visa att det finns en unik linjär avbildning $L: \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sådan att $L(z \otimes w) = zw$ för alla $z, w \in \mathbb{C}$. (1 p)
(c) Bestäm en bas för kärnan till L . (2 p)

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Ge exempel på komplexa 2×2 -matriser A , B , C och D sådana att
- (a) A är Hermitesk men inte unitär. (1 p)
 - (b) B är unitär men inte Hermitesk. (1 p)
 - (c) C är diagonaliserbar men varken unitär eller Hermitesk. (1 p)
 - (d) D är inte diagonaliserbar. (1 p)
5. Låt V vara ett komplext vektorrum med bas $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$.
- (a) Definiera det *duala vektorrummet* V^* och den *duala basen* $\mathbf{b}_1^*, \dots, \mathbf{b}_n^*$ till $\mathcal{B}$. (1 p)
 - (b) Visa att $\mathbf{b}_1^*, \dots, \mathbf{b}_n^*$ är en bas. (2 p)
 - (c) Låt L vara en operator på V som i basen $\mathcal{B}$ ges av matrisen $A = (A_{ij})$. Definiera den *duala avbildningen* $L^*: V^* \rightarrow V^*$ och beskriv dess matris i den duala basen. (1 p)

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. För alla värden på parametern $a \in \mathbb{R}$, bestäm Jordans normalform till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2a - 3 & a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 3 - a & 2 \end{bmatrix}.$$

(Du behöver inte bestämma någon Jordanbas.) (4 p)

7. Låt $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^n$ och låt ℓ_1 och ℓ_2 vara motsvarande linjer genom origo i $\mathbb{R}^n$. Låt θ vara vinkeln mellan $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. Notera att $0 \leq \theta \leq \pi$.
- (a) Om $n = 2$ och S_i betecknar speglingen i linjen ℓ_i , för vilka vinklar θ kommuterar S_1 och S_2 ? Beskriv också operatoren $S_1 S_2$ för varje sådan vinkel θ . (2 p)
 - (b) Om $n = 3$ och R_i betecknar rotation kring linjen ℓ_i med vinkeln $\pi/3$ (vinkeln mäts med hjälp av riktningsvektorn $\mathbf{v}_i$ och högerhandsregeln), för vilka vinklar θ kommuterar R_1 och R_2 ? Beskriv operatoren $R_1 R_2$ för varje sådan vinkel θ . (2 p)
8. Låt V vara ett ändligtdimensionellt reellt inre produktrum. Låt $\text{Hom}(V, V)$ vara rummet av operatorer på V med den inre produkten $\langle L_1 | L_2 \rangle = \text{tr}(L_1^\dagger L_2)$. Låt $S \subset \text{Hom}(V, V)$ vara delrummet av symmetriska, dvs självadjungerade, operatorer. Bestäm $S^\perp$ och ge en enkel formel för den ortogonala projektionen på S . (4 p)
9. Låt V vara ett komplext vektorrum av dimension n och låt $d, k \geq 1$ vara heltal. Vad är det minsta respektive största möjliga värdet på $\dim \ker(L^k)$ för en operator L på V sådan att $\dim \ker(L) = d$? (4 p)