



**SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1**  
**Tentamen**  
**Måndag den 16 december 2024**

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från lappskrivningarna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

| Fx | E  | D  | C  | B  | A  |
|----|----|----|----|----|----|
| 11 | 12 | 14 | 16 | 19 | 21 |

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

---

**DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM**

1. En av följande ekvationer är exakt. Lös den ekvationen med initialvillkoret  $y(1) = 2$ . Ange lösningens existensintervall.

$$(1) \quad (1 + \ln x) \frac{dy}{dx} = 1 + \ln y + \frac{y}{x},$$

$$(2) \quad (1 - \ln x) \frac{dy}{dx} = 1 + \ln y + \frac{y}{x},$$

$$(3) \quad (1 - \ln x) \frac{dy}{dx} = 1 + \ln x + \frac{y}{x}.$$

**(4 p)**

2. Bestäm de kritiska punkterna till följande autonoma system för  $(x, y) = (x(t), y(t))$  samt avgör om de är stabila.

$$\begin{cases} x' = y^2 - x^2 \\ y' = 1 - x \end{cases}.$$

**(4 p)**

3. Hitta den allmänna lösningen till det homogena systemet

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 11 & 18 \\ -6 & -10 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad t > 0,$$

genom en ansats av typen  $\mathbf{x}(t) = t^r \boldsymbol{\xi}$ , där  $r$  är ett tal och  $\boldsymbol{\xi}$  är en vektor. Lös därefter det inhomogena systemet

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 11 & 18 \\ -6 & -10 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} -3e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}.$$

(4 p)

## DEL II – AVANCERADE PROBLEM

4. (a) Bestäm den serielösning  $y = y_1(x)$  vid  $x = 0$  till ekvationen

$$y'' - (x+1)y' - y = 0$$

som uppfyller  $y_1(0) = 1$  och  $y_1'(0) = -1$ . För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i serielösningen, samt beräkna minst fem termer i serien.

- (b) Låt  $y = y_2(x)$  vara den lösning till ekvationen ovan som uppfyller  $y_2(0) = 4$  och  $y_2'(0) = 1$  (du behöver inte bestämma en serielösning för  $y_2(x)$ ). Använd Abels sats för att beräkna Wronskianen  $W[y_1, y_2](x)$ .

(4 p)

5. (a) Ekvationen  $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$  för  $y = y(x)$  kallas *exakt* om den kan skrivas på formen  $[P(x)y']' + [f(x)y]' = 0$  för någon funktion  $f(x)$ . Bestäm ett villkor på koefficienterna  $P(x), Q(x), R(x)$  för att ekvationen ska vara exakt.

- (b) Bestäm  $R(x)$  så att ekvationen

$$(x+1)y'' + (2 - (x+1)\tan x)y' + R(x)y = 0$$

är exakt. Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen med denna  $R(x)$ .

(4 p)

6. Denna uppgift gäller entydighet för lösningar  $y = y(t)$  till initialvärdesproblemet

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 0, \tag{1}$$

där  $f(t, y)$  är en kontinuerlig funktion definierad på något område  $R$  i  $ty$ -planet som innehåller punkten  $(0, 0)$ .

- (a) Ge ett exempel på ett initialvärdesproblem som (1) med två olika funktioner som lösningar. Ge en noggrann förklaring varför de funktioner du anger är lösningar.

- (b) Antag nu att funktionen  $f(t, y)$  i (1) dessutom uppfyller ett Lipschitz-villkor i  $y$ , alltså att det finns en konstant  $C > 0$  så att

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C|y_1 - y_2|$$

för alla  $(t, y_1), (t, y_2)$  i området  $R$ . Visa att om  $\phi(t)$  och  $\psi(t)$  båda löser problemet (1) så är  $\phi(t) = \psi(t)$ .

(4 p)

## FORMELBLAD

## Trigonometriska formler

- (1)  $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- (2)  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- (3)  $\sin n\pi = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$
- (4)  $\cos n\pi = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}$
- (5)  $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- (6)  $\tan \alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- (7)  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- (8)  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
- (9)  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- (10)  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
- (11)  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
- (12)  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- (13)  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
- (14)  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
- (15)  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
- (16)  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
- (17)  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
- (18)  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
- (19)  $\sin^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$
- (20)  $\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$
- (21)  $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$
- (22)  $\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$
- (23)  $\sin \alpha = \frac{1}{2i}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})$
- (24)  $\cosh \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha})$
- (25)  $\sinh \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})$
- (26)  $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$

## Integraler

- (27)  $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1}, \quad p \neq -1$
- (28)  $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$

- (29)  $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$
- (30)  $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$
- (31)  $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, \quad a \neq b$
- (32)  $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$
- (33)  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
- (34)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$
- (35)  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a}$
- (36)  $\int x^p \ln ax dx = x^{p+1} \left( \frac{\ln ax}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} \right), \quad p \neq -1$
- (37)  $\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2$
- (38)  $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
- (39)  $\int x e^{ax} dx = \left( \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax}$
- (40)  $\int x^2 e^{ax} dx = \left( \frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax}$
- (41)  $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$
- (42)  $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$
- (43)  $\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos ax|$
- (44)  $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| = 2 \tanh^{-1} \left( \tan \frac{x}{2} \right)$
- (45)  $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$
- (46)  $\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax$
- (47)  $\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax$
- (48)  $\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2}$
- (49)  $\int x^2 \sin ax dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2}$
- (50)  $\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax)$
- (51)  $\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax)$