



Lösningsförslag till tentamen
Torsdag den 21 oktober 2021

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $f(x) = (\frac{1}{x} - 2)e^{-x}$.

- (a) Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter till f . (1,5 p)
- (b) Ange alla eventuella lokala extrempunkter till f . (1,5 p)
- (c) Skissa grafen för $f(x)$. (Du behöver inte att beräkna inflexionspunkter). (1 p)

Lösningsförslag. Definitionsmängd av f är $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Följande kommer från definitionen av gränsvärde: $\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{1}{x} = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ och följande håller från egenskaper av exponential funktion, speciellt kontinuitet: $\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} e^{-x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$ och $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$. Nu använder vi produkt och addition reglerna för beräkningen av gränsvärden och vi har:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

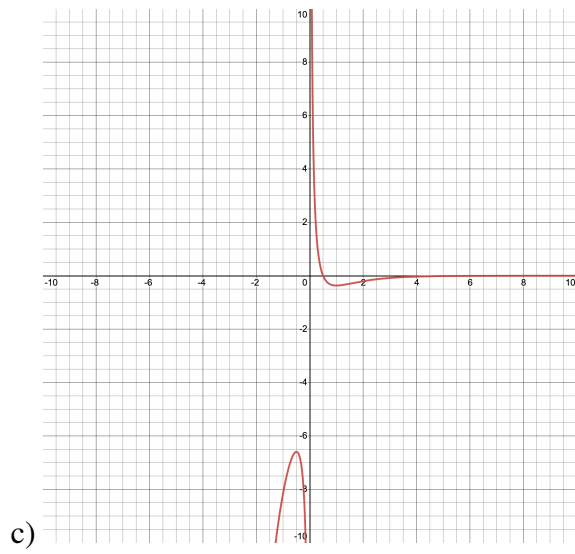
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Detta betyder att vi har en asymptoter $x = 0$ och $y = 0$.

b) Vi beräknar första derivatan enligt reglerna:

$$f'(x) = (\frac{1}{x} - 2)'e^{-1} + (e^{-x})'(\frac{1}{x} - 2) = \frac{2(x-1)(x+\frac{1}{2})}{x^2}e^{-x}.$$

Det följer att stationära punkter är $x = 1$ och $x = -\frac{1}{2}$. Tecknet av f' ändras i denna punkter, därför de är extrempunkter för f . Om $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ eller $x \in (1, \infty)$, vi har att $f'(x) > 0$ då är f växande på intervallet $(-\infty, -\frac{1}{2})$ och på intervallet $(1, \infty)$. Om $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$ eller $x \in (0, 1)$, vi har att $f'(x) < 0$ då är f avtagande på intervallet $(-\frac{1}{2}, 0)$ och på intervallet $(0, 1)$.



2. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området som definieras av

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq e^{2x} \text{ roterar kring}$$

(a) x -axeln,

(2 p)

(b) y -axeln.

(2 p)

Lösningsförslag. a) Volymen av kroppen som vi har när området roterar kring x axeln är:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^1 (e^{2x})^2 dx = \pi \frac{e^{4x}}{4} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} [e^4 - 1].$$

b) Volymen av kroppen som vi har när området roterar kring y axeln är:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx = 2\pi \int_0^1 x e^{2x} dx.$$

Integral $\int_0^1 x e^{2x} dx$ beräknar vi med hjälp av partiell integration: låt $u = x$, $dv = e^{2x} dx$.

Då har vi att: $du = dx$ och $v = \frac{e^{2x}}{2}$. Därför:

$$\int_0^1 x e^{2x} dx = x \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

Så är

$$V_y = 2\pi \left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) = \pi \left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \right).$$

□

3. Avgör om följande integraler är konvergenta eller divergenta:

(a)

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

(1 p)

(b)

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$$

(1,5 p)

(c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$$

(1,5 p)

Lösningförslag. a) Vi kommer att använda jämförelsesatsen för integraler två gånger. (Obs: för att använda satsen vi behöver att ha funktioner som är positiva eller noll i hela intervallet, men funktionen $\frac{\cos x}{x^2}$ kan vara negativ.)

För funktionen $f(x) = \frac{|\cos x|}{x^2}$ och $g(x) = \frac{\cos x + |\cos x|}{x^2}$ har vi att $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$ och $0 \leq g(x) \leq \frac{2}{x^2}$, för att $|\cos x| \leq 1$.

Enligt satsen från föreläsningar $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}$ är konvergent. Enligt jämförelsesatsen för integraler då är också $\int_1^{\infty} f(x)$ och $\int_1^{\infty} g(x)$ konvergent.

Vi har det $\frac{\cos x}{x^2} = g(x) - f(x)$ och $\int_1^{\infty} f(x)$ och $\int_1^{\infty} g(x)$ är konvergenta, därför är också $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}$ konvergent.

b) Vi beräknar integralen $\int_0^R x e^{-x}$ med hjälp av partiellintegration:

$$\int_0^R x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_0^R - \int_0^R (-e^{-x}) dx = -R e^{-R} - e^{-x} \Big|_0^R = -R e^{-R} - e^{-R} + 1.$$

Därför: $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R x e^{-x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} (-R e^{-R} - e^{-R} + 1) = 1$, så är $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$ konvergent.

c) Vi beräknar integralen med hjälp av variabelbyte metod: låt $u = \sin x$. Då är $du = \cos x dx$. När x går mellan 0 och $\frac{\pi}{2}$, u går mellan 0 och 1. Därför:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \int_0^1 u^{-1/3} du = u^{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} \Big|_0^1 = \frac{3}{2}, \text{ och så är integralen konvergent.}$$

□

4. (a) Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en talföljd och låt $a \in \mathbb{R}$. Definera vad som menas med att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. (1 p)
- (b) Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin n}{n^2 + n - 6} + \sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$. (3 p)

Lösningsförslag. a) Kolla i häftet.

b) För att $|\sin x| \leq 1$ för alla x då har vi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin n}{n^2 + n - 6} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + n - 6} = 0.$$

Därför, enligt jämförelsesatsen: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin n}{n^2 + n - 6} \right| = 0$. Från definitionen av talföljd konvergens: om absolut beloppet av en talföljd konvergerar mot noll då konvergerar talföljden mot noll. Därför $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n^2 + n - 6} = 0$.

För att beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ använder vi substitution: $t = \frac{1}{\sqrt{n}}$ och vi observerar att $n \rightarrow \infty$ implicerar $t \rightarrow 0$. Därför:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

(Det sista likheten är en av de standard gränsvärden och visas med Maclaren formel t.ex. (kolla i häftet).)

För att både $\frac{\sin n}{n^2 + n - 6}$ och $\sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ är konvergent, då kan vi använda räkneregler för gränsvärden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin n}{n^2 + n - 6} + \sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n^2 + n - 6} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 + 1 = 1.$$

□

5. (a) Definera vad som menas med att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar. (1 p)

(b) Låt

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Visa att f är deriverbar och beräkna $f'(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$. (3 p)

Lösningsförslag. a) Kolla i häftet.

b) För $x \neq 0$ använder vi räkneregler för att beräkna derivatan av f i punkt x :

$$f'(x) = x' + (x^2 \cos \frac{1}{x})' = 1 + 2x \cos \frac{1}{x} + x^2 (-\sin \frac{1}{x}) \cdot \frac{-1}{x^2} = 1 + 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$$

För $x = 0$ använder vi definitionen av derivatan:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h + h^2 \cos \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h \cos \frac{1}{h}).$$

Vi observerar att $|h \cos \frac{1}{h}| \leq |h|$, och $\lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0$, därför enligt jämförelsesatsen för gränsvärden är $\lim_{h \rightarrow 0} |h \cos \frac{1}{h}| = 0$ och så är $\lim_{h \rightarrow 0} h \cos \frac{1}{h} = 0$.

Därför, enligt definition av derivatan, $f'(0) = 1$.

Vi skriver nu funktionen $f'(x)$ som:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

□

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. (a) Definera vad som menas med att en funktion $g(x)$ är kontinuerlig i en punkt $x = a$. (1 p)
- (b) Låt

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ e^x & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Bestäm mängden S av alla punkter $x \in \mathbb{R}$ där funktionen $g(x)$ är kontinuerlig.

(3 p)

- (c) Är $g(x)$ deriverbar i någon punkt $a \in \mathbb{R}$? Förklara.

(2 p)

Lösningsförslag. a) Kolla i häftet.

b)

(i) Låt $x_0 \in \mathbb{Q}$. Om $x_0 \neq 0$, låt $y_n \notin \mathbb{Q}$ vara en talföljd sådant att $y_n \rightarrow x_0$ då $n \rightarrow \infty$. Funktionen $y \mapsto e^y$ är kontinuerlig, så är $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{y_n} = e^{x_0}$. Enligt definitionen av funktionen g , $g(y_n) = e^{y_n}$, därför $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = e^{x_0} \neq 1$ när $x_0 \neq 0$, medan $g(x_0) = 1$ enligt definitionen. Så har vi att $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) \neq g(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n)$. Detta betyder att g är inte kontinuerlig i punkten x_0 .

Om $x_0 = 0$, då är $g(x_0) = 1$. Så

$$g(y) - g(x_0) = \begin{cases} 0 & y \in \mathbb{Q} \\ e^y - 1 & y \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

För att $\lim_{y \rightarrow 0} (e^y - 1) = 0$, det följer att $\lim_{y \rightarrow x_0} (g(y) - g(x_0)) = 0$ vilket ger $\lim_{y \rightarrow x_0} g(y) = g(x_0)$.

Enligt definitionen, detta betyder att g är kontinuerlig i punkt $x_0 = 0$.

ii) Låt $x_0 \notin \mathbb{Q}$. Enligt definitionen av g , $g(x_0) = e^{x_0}$. För varje n , det finns ett rationellt tal $y_n \in (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$ dvs y_n är en talföljd av rationella tal som konvergerar mot x_0 . Enligt definitionen av g har vi att $g(y_n) = 1$ medan $g(x_0) = e^{x_0} \neq 1$. Därför $g(y_n)$ konvergerar inte mot $g(x_0)$ vilken betyder, enligt definitionen av kontinuitet, att g är inte kontinuerlig i x_0 .

Tillsammans (i) och (ii) implicerar att det finns bara en punkt där g är kontinuerlig: $x_0 = 0$. Därför $S = \{0\}$.

c) Funktionen som är deriverbar i en punkt är också kontinuerlig i den punkt, enligt satsen som vi bevisade i föreläsningar. Därför, det behövs bara att kontrollera deriverbarhet i den enda punkt $x_0 = 0$ i mängden S .

$$\frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \frac{g(h) - 1}{h} = \begin{cases} 0 & h \in \mathbb{Q} \\ \frac{e^h - 1}{h} & h \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Enligt det standardgränsvärde: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \neq 0$, det följer att gränsvärde $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h}$ existerar inte.

Slutsatsen är: det finns inga punkter i $\mathbb{R}$ där g är deriverbar.

□

7. (a) Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler. (3 p)

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_x^{4x} \cos(t^2) dt.$$

(3 p)

Lösningsförslag. a) Kolla i häftet.

b) Enligt medelvärdessatsen: för varje x det finns en α_x (som beror på x) sådant att $\alpha_x \in (x, 4x)$ och $\int_x^{4x} \cos(t^2) dt = (4x - x) \cos(\alpha_x^2) = 3x \cos(\alpha_x^2)$. Därför har vi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_x^{4x} \cos(t^2) dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} 3x \cos(\alpha_x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 \cos(\alpha_x^2).$$

Nu observerar vi det $\alpha_x \in (x, 4x)$ implicerar det $\alpha_x \rightarrow 0$ om $x \rightarrow 0$ enligt instägningsatsen. Sedan använder vi att $\cos(x^2)$ är kontinuerlig funktion av variabel x som sammansättning av elementära funktioner. Därför, om $\alpha_x \rightarrow 0$, då $\cos(\alpha_x^2) \rightarrow \cos(0) = 1$.

Det följer att $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_x^{4x} \cos(t^2) dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 \cos(\alpha_x^2) = 3$.

□

8. (a) Är nedanstående påståenden sanna eller falska? (Ge ett bevis eller ett tydligt motexempel!)

Påstående P: Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent, så är talföljden (a_k) begränsad.

Påstående R: Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent så är talföljden (a_k) avtagande.

(4 p)

- (b) För vilka värden på konstanten $c > 0$ är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c^k + 1}$ konvergent och för vilka värden är den divergent?

(2 p)

Lösningförslag. a) Påstående P är sant. Bevis: Låt serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ vara konvergent. Enligt definitionen av konvergens, detta betyder att talföljd $S_N = \sum_{k=1}^N a_k$ av delsummor konvergerar mot något $s \in \mathbb{R}$. Därför också S_{N-1} konvergerar mot samma tal s . Nu har vi att $a_N = S_N - S_{N-1}$. Därför, enligt räkneregler för gränsvärde beräkningar, har vi att a_N är också konvergent talföljd, och a_N konvergerar mot $s - s = 0$.

Nu visar vi att varje konvergent talföljd är begränsad: Antag att (a_k) konvergerar mot a . Givet $\varepsilon = 1$ (t.ex), det finns $N \in \mathbb{N}$ sådant att för alla $n > N$ vi har att $a_k \in (a - 1, a + 1)$. Låt $M = \max\{a_1, \dots, a_N, a + 1\}$ och låt $m = \min\{a - 1, a_1, \dots, a_N\}$. Då har vi att för varje $k \in \mathbb{N}$, $m \leq a_k \leq M$. Därför är (a_k) begränsad.

Påstående R är falsk. Till exempel: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ är konvergent. Detta visar vi genom att observera att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent (enligt satsen), därför har vi att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ är absolut konvergent. Enligt satsen bevisad i föreläsningar, absolut konvergent serien är konvergent. Därför: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ är konvergent. Men $a_k = \frac{(-1)^k}{k^2}$ är inte avtagande för att t.ex. $a_4 > 0 > a_3$ ((a_k) är avtagande omm för alla $n, k \in \mathbb{N}$, $k < n$ implicerar $a_n \leq a_k$).

b) Om $c > 1$, då är $1 + c^k > c^k > 0$, och så är: $\frac{1}{c^k + 1} < \frac{1}{c^k}$. Därför:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c^k + 1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c}\right)^k.$$

Den sista serien $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c}\right)^k$ är harmonisk serien med konstant $\frac{1}{c} < 1$. Därför, enligt satsen om harmonisk serien, $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c}\right)^k$ är konvergent.

Om $0 < c \leq 1$, då är $0 < c^k \leq 1$, och så är: $1 < c^k + 1 \leq 2$. Därför: $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{c^k + 1} < 1$. Serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ är divergent enligt divergence test för att $a_k = \frac{1}{2}$ konvergerar inte mot 0. Därför, enligt jämförelsesatsen för serier har vi att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c^k + 1}$ är också divergent.

□