



SF1673 Analys i en variabel
Tentamen
Torsdag den 21 oktober 2021

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Danijela Damjanović

Tentamen består av åtta uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de fem första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt sex poäng. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del I. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	20	Grundläggande problem	15	16	16	16	16	16
II	18	Avancerade problem	0	0	4	8	11	14

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är välpresenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är välmotiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $f(x) = (\frac{1}{x} - 2)e^{-x}$.

- (a) Ange alla eventuella lodräta och vågräta asymptoter till f . (1,5 p)
- (b) Ange alla eventuella lokala extrempunkter till f . (1,5 p)
- (c) Skissa grafen för $f(x)$. (Du behöver inte att beräkna inflexionspunkter). (1 p)

2. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då området som definieras av $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq e^{2x}$ roterar kring

- (a) x -axeln, (2 p)
- (b) y -axeln. (2 p)

3. Avgör om följande integraler är konvergenta eller divergenta:

(a)

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

(1 p)

(b)

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$$

(1,5 p)

(c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$$

(1,5 p)

4. (a) Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara en talföljd och låt $a \in \mathbb{R}$. Definera vad som menas med att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. (1 p)

- (b) Beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin n}{n^2 + n - 6} + \sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$. (3 p)

5. (a) Definera vad som menas med att $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar. (1 p)

(b) Låt

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Visa att f är deriverbar och beräkna $f'(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$. (3 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. (a) Definera vad som menas med att en funktion $g(x)$ är kontinuerlig i en punkt $x = a$. (1 p)

(b) Låt

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ e^x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Bestäm mängden S av alla punkter $x \in \mathbb{R}$ där funktionen $g(x)$ är kontinuerlig.

(3 p)

- (c) Är $g(x)$ deriverbar i någon punkt $a \in \mathbb{R}$? Förklara. (2 p)

7. (a) Formulera och bevisa medelvärdessatsen för integraler. (3 p)

(b) Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_x^{4x} \cos(t^2) dt.$$

(3 p)

8. (a) Är nedanstående påståenden sanna eller falska? (Ge ett bevis eller ett tydligt motexempel!)

Påstående P: Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent, så är talföljden (a_k) begränsad.

Påstående R: Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent så är talföljden (a_k) avtagande.

(4 p)

- (b) För vilka värden på konstanten $c > 0$ är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c^k + 1}$ konvergent och för vilka värden är den divergent? (2 p)