



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
24 april 2025

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 12 poäng och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II upp till maximalt 8 poäng. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
Total	36		11	12	18	22	26	30

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. En Hammingkod C av längd 7 ges av nollrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

med koefficienter i kroppen $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(a) Bestäm en bas för C . (2 p)

(b) Bestäm ett delrum $W \subseteq \mathbb{F}_2^7$ som uppfyller $W \oplus C = \mathbb{F}_2^7$ som inre direkt summa. (2 p)

2. Låt $V = \mathbb{C}^5$ och

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_5\}$$

där $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ är standardbasen för $\mathbb{C}^5$. Bestäm den duala basen $\mathcal{B}^*$ för V^* . (4 p)

3. Bestäm singularvärden och en ortonormal bas av vänstersingulära vektorer till den reella matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Definiera begreppet *adjungerad operator*. (1 p)
 (b) Ge ett exempel på en operator som saknar adjungerad operator. (1 p)
 (c) Visa att alla egenvärden till en självadjungerad operator på ett komplext inre produkt-
 rum är reella. (1 p)
 (d) Visa att egenvektorer som tillhör olika egenrum till en självadjungerad operator är
 ortogonala mot varandra. (1 p)
5. (a) Definiera begreppet *primkropp*. (1 p)
 (b) Visa att primkroppen i en kropp måste vara isomorf med $\mathbb{Q}$ eller med $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ för
 något primtal p . (1 p)
 (c) Ge ett explicit exempel på en kropp med precis nio element. (2 p)

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Avgör vilka karaktäristiska polynom som är möjliga för 4×4 -matriser A med koefficienter
 i $\mathbb{C}$ med minimalpolynom $q_A(x) = x^3 + 2x^2 + x$. Ge exempel på en matris för varje sådant
 polynom. (4 p)
7. Matrisen B är nilpotent och har två Jordanblock av storlek 2×2 och tre Jordanblock
 av storlek 1×1 . Matrisen A uppfyller $A^2 = B$. Avgör vilka möjligheter det finns för
 Jordanformen för A . (4 p)
8. Låt V och W vara ändligtdimensionella komplexa inre produkttrum. Visa att det finns en
 inre produkt på $V \otimes W$ som uppfyller att
 (a) $\langle \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2 \rangle$, för $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ i V och $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ i W , (2 p)
 och att
 (b) $L_1 \otimes L_2$ är en unitär operator på $V \otimes W$ om L_1 är en unitär operator på V och L_2 är
 en unitär operator på W . (2 p)
9. Låt V vara ett komplext vektorrum av dimension n och låt $X \subseteq V \otimes V$ och $Y \subseteq V \otimes V \otimes V$
 vara mängderna som ges av

$$X = \{\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V\}$$

och

$$Y = \{2\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} : \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V\}.$$

- (a) Bestäm dimensionen av $\text{span } X \subseteq V \otimes V$. (2 p)
 (b) Bestäm dimensionen av $\text{span } Y \subseteq V \otimes V \otimes V$. (2 p)