



SF1672 Linjär algebra

Tentamen med lösningsförslag

tisdag, 11 april 2023, 08:00–13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Tentamen består av åtta uppgifter. Del I utgörs av fem uppgifter som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av tre uppgifter som testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg.

Bonuspoäng från del I av inlämningsuppgifterna och från quizzarna adderas till erhållna poäng på del I. Bonuspoäng från del II av inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del II. (Bonuspoäng räknas bara under samma läsår och inte vid plussning.)

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell, där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Del I	16	16	16	16	16	15
Del II	14	11	8	4	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden tilldelas inte full poäng.

Del I

$$\begin{array}{rcl} 3x & +y & = 1 \\ ax & +y & +z = a \\ x & +y & +az = 3. \end{array}$$

- a) För vilka värden på a har systemet en unik lösning, ingen lösning, respektive oändligt många lösningar? **(2 p)**
- b) Bestäm lösningsmängden i det/de fall där oändligt många lösningar finns. **(2 p)**

a) Matrisen som tillhör ekvationssystemet är

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

En unik lösning finns (oavsett högerled) omm $\det(A) \neq 0$. Vi beräknar:

$$\det(A) = 3(1 \cdot a - 1 \cdot 1) - 1(a \cdot a - 1 \cdot 1) = -a^2 + 3a - 2.$$

Vi ser att $\det(A) = 0$ omm $a = 1$ eller $a = 2$. Dessa fall måste undersökas separat.

Om $a = 1$ så är ges ekvationssystemet av den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

och vi ser direkt att rad 2 och 3 motsäger varandra. För $a = 2$ får vi däremot den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right].$$

Systemet är lösbart (t. ex. av $[0, 1, 1]^T$) och har därmed oändligt många lösningar i detta fall.

b) I fallet $a = 2$ använder vi Gausselimination på den sista utökade matrisen från del a:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -8 \end{array} \right]$$

Eftersom rad 2 och 3 är multipla av varandra behöver vi inte fortsätta och ser att lösningsmängden ges av

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 - 3t \\ 1 + t \end{bmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Låt L vara reflektionen i planet $x + 2y - z = 0$ i $\mathbb{R}^3$.

a) Bestäm standardmatrisen till avbildningen L . (2 p)

b) Bestäm avbildningens egenvärden och egenvektorer. (2 p)

Lösningsförslag.

a) Reflektionen i planet med normalvektorn $\mathbf{n}$ ges av

$$\text{refl}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2 \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} = \left(I - \frac{2}{\|\mathbf{n}\|^2} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \right) \mathbf{x}$$

i vårt fall, där $\mathbf{n} = [1, 2, -1]^T$ och $\|\mathbf{n}\|^2 = 6$ är standardmatrisen alltså

$$I - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = I - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Här krävs ingen beräkning. En reflektion fixerar ett plan (d.v.s. ett egenvärde $\lambda_1 = 1$ med geometrisk och algebraisk multiplicitet 1) och skickar planets normalvektor $\mathbf{n}$ till $-\mathbf{n}$ ($\lambda_2 = -1$ med multiplicitet 1). Vi har alltså ett egenvärde -1 med tillhörande egenvektor $\mathbf{n}$ och ett dubbel egenvärde 1 med tillhörande egenrum $\mathbf{n}^\perp$. Detta egenrum spänns upp t. ex. av $\mathbf{v} = [1, 0, 1]^T$ och $\mathbf{w} = [-2, 1, 0]^T$.

3. Finn de värden på a, b så att funktionen $f(x) = ax + bx^2$ i minstakvadratmeningen bäst approximerar mätvärdena

x	$f(x)$
-2	3
-1	1
1	2
2	4

(4 p)

Lösningsförslag. Vi löser normalekvationen

$$A^T A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^T \mathbf{b},$$

där $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(En exakt lösning skulle ges av $A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{b}$ om den fanns).

Vi beräknar

$$A^T A = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 34 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 31 \end{bmatrix}.$$

Därmed ges lösningen utan vidare Gausselimination av $a = \frac{3}{10}$ och $b = \frac{31}{34}$.

4. Låt

$$\mathbf{v} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

och låt $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara rotationen kring axeln som spänns upp av $\mathbf{v}$ med vinkel $\pi/4$ i den riktning som ges av högerhandregeln när tummen pekar i riktning av $\mathbf{v}$.

- Bestäm en ortonormalbas $\mathcal{B}$ som innehåller $\mathbf{v}$. (1 p)
- Bestäm matrisen $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ för transformationen T med avseende på basen $\mathcal{B}$. (1 p)
- Bestäm standardmatrisen $[T]$ för T . (2 p)

Lösningsförslag.

- a) Ett exempel på en sådan bas är $\{\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, där

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2.$$

- b) Eftersom basen $\mathcal{B}$ är högerorienterad, så är

$$[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ 0 & \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}.$$

c) Vi använder basbytesformeln

$$[T] = [T]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}} = M_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}M_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = U[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}U^T,$$

där $\mathcal{E}$ är standardbasen, U är den ortogonala matrisen som har $\mathbf{v}_i$ som kolonner och vi använder att $U^{-1} = U^T$. Vi beräknar:

$$\begin{aligned} [T] &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 + 4\sqrt{2} & 2 - 4\sqrt{2} & 2 + 2\sqrt{2} \\ 2 + 2\sqrt{2} & 4 + \frac{5}{\sqrt{2}} & 4 - \frac{7}{\sqrt{2}} \\ 2 - 4\sqrt{2} & 4 - \frac{1}{\sqrt{2}} & 4 + \frac{5}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. Den linjära avbildningen $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uppfyller:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Beräkna volymen av $T(Q)$, där Q är kuben som spänns upp av standardbasvektorer.

OBS: Du behöver inte räkna ut någon avbildningsmatris till T .

(4 p)

Lösningförslag. Vi kan tänka på T som en sammansättning av två avbildningar:

$$T = T_1 \circ T_2^{-1}$$

där

$$T_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Detta gäller eftersom T_1 avbildar standardbasvektorer till de givna bildvektorer av T , och T_2^{-1} avbildar de givna källvektorer av T till standardbasvektorer.

Eftersom $\text{vol}(Q) = 1$ så gäller

$$\text{vol}(T(Q)) = |\det(T)| = |\det(T_1)| \cdot |\det(T_2)|^{-1} = 11 \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{11}{3}.$$

Del II

6. Vi kallar en linje L genom origo en *invariant linje* för en linjär transformation $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ om $T(L) \subseteq L$, d.v.s. om T avbildar punkter i L på punkter i L .

- a) Visa att varje linjär transformation $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ har en invariant linje. **(3 p)**
- b) Visa genom att ge ett konkret motexempel att det finns linjära transformation $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ utan invariant linje. *OBS: Du behöver ange en konkret linjär transformation T , t. ex. genom att ange en matris, och motivera varför ingen invariant linje kan finnas för denna T .* **(3 p)**

Lösningsförslag.

- a) En invariant linje är exakt samma sak som en linje som spänns upp av en egenvektor. En invariant linje finns alltså om och endast om avbildningen T har ett egenvärde (och därmed en egenvektor). Egenvärdena av $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ges av nollställena av det karaktäristiska polynom $\chi_T(\lambda)$, vilket är ett polynom av grad 3. Reella polynom av grad 3 (eller godtycklig udda grad) har alltid åtminstone ett nollställe.

En förklaring av detta krävs inte eftersom det behandlas i analys, men här är en: antag att

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0.$$

Då är $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} p(\lambda) = \infty$ och $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} p(\lambda) = -\infty$. Enligt medelvärdesatsen måste det finnas ett λ med $p(\lambda) = 0$.

- b) En 4×4 -matris har ett karaktäristiskt polynom av grad 4, och sådana polynom behöver inte ha reella nollställena. Ett exempel ges av $p(\lambda) = \lambda^4 + 1$. Vi behöver alltså bara hitta en matris med detta karaktäristiska polynom. Till exempel följande matris:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Betrakta följande punkter i $\mathbb{R}^3$:

$$P = (0, 3, 1), \quad Q = (2, 1, 1) \quad \text{och} \quad R = (1, 1, 2).$$

Låt L vara mängden av alla punkter i $\mathbb{R}^3$ som har samma avstånd till P , Q och R . Till exempel ligger punkten $Y = (0, 1, 0)$ i mängden L då avståndet från Y till var och en av punkterna är lika med $\sqrt{5}$.

- a) Visa att L är en linje och bestäm en parameterform för L . **(3 p)**
- b) Bestäm det minsta avståndet av L till punkterna. **(3 p)**

Lösningsförslag.

- a) Låt C vara mittpunkten av de tre punkterna, d.v.s. den punkt på triangeln med hörn P , Q , R som har samma avstånd till alla tre hörn. C är alltså centret av cirkeln genom P , Q och R . Då är C den enda punkten i planet Π som innehåller P , Q , R som har samma avstånd till P , Q , R . Låt $\mathbf{n}$ vara triangelns normalvektor, A vara en godtycklig punkt och $B = \text{proj}_{\Pi}(A)$ projektionen av A på planet Π . Då är enligt Pythagoras sats

$$|AP|^2 = |AB|^2 + |BP|^2, \quad |AQ|^2 = |AB|^2 + |BQ|^2, \quad |AR|^2 = |AB|^2 + |BR|^2.$$

Vi ser att A har samma avstånd till P , Q och R om och endast om $|BP| = |BQ| = |BR|$, d.v.s. $C = B$. Alltså är mängden L i fråga linjen genom C som är ortogonal mot Π .

För att bestämma en parameterform kan vi använda punkten Y som baspunkt och riktningsvektor

$$\mathbf{n} = (Q - P) \times (R - P) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Därmed är

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

- b) Punkten i fråga är punkten C från del a) enligt Pythagorasformeln ovan, vilket är skärningspunkten av L och Π . Planet Π har (skalerad) normalvektor $[1, 1, 1]^T$ och ges av

$$x + y + z = 4.$$

Genom insättning av parametriseringen av L får vi

$$4 = (-2t) + (1 - 2t) + (-2t) = -6t + 1 \implies t = -\frac{1}{2} \implies C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och avståndet till P , Q , och R är

$$\|C - P\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2}.$$

8. Låt $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en linjär transformation som uppfyller $P^2 = P$ samt $\|P\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}\|$ för alla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

a) Visa att bildrummen av P och $I_n - P$ är ortogonala. (4 p)

b) Visa att P är en ortogonal projektion på ett delrum av $\mathbb{R}^n$. (2 p)

Lösningsförslag.

- a) Vi måste visa att för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$P\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} - P\mathbf{y}) = 0.$$

Betrakta vektorn $\mathbf{z} = P\mathbf{x} + t\mathbf{y}$, för godtyckligt $t \in \mathbb{R}$. Enligt förutsättning är

$$\|P\mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{z}\|,$$

alltså

$$\|P^2\mathbf{x} + tP\mathbf{y}\|^2 = \|P\mathbf{x} + tP\mathbf{y}\|^2 \leq \|P\mathbf{x} + t\mathbf{y}\|^2.$$

Vi multiplicerar ut:

$$\|P\mathbf{x}\|^2 + t^2\|P\mathbf{y}\|^2 + 2tP\mathbf{x} \cdot P\mathbf{y} \leq \|P\mathbf{x}\|^2 + t^2\|\mathbf{y}\|^2 + 2tP\mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

vilket är ekvivalent med

$$t^2(\|\mathbf{y}\|^2 - \|P\mathbf{y}\|^2) + 2tP\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} - P\mathbf{y}) \geq 0,$$

och detta måste gälla för alla $t \in \mathbb{R}$.

Om $\|\mathbf{y}\|^2 = \|P\mathbf{y}\|^2$ så är polynomet linjärt och olikheten bara kan uppfyllas om det är identiskt 0.

Om däremot polynomet har iett nollskilt (positivt enligt förutsättningen) koefficient för t^2 , och har två olika nollställten så antar det negativa värden mellan dem, därför måste den linjära termen även i detta fall vara lika med 0:

$$P\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} - P\mathbf{y}) = 0,$$

vilket skulle visas.

- b) Allmänt karakteriseras en ortogonal projektion Q av att det finns ett delrum V med ortogonalt komplement $V^\perp$ sådan att $Q(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$ när $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ för $\mathbf{x} \in V$ och $\mathbf{y} \in V^\perp$. I vårt fall skriver vi $\mathbf{z} = P(\mathbf{z}) + (\mathbf{z} - P(\mathbf{z}))$. Om vi sätter $V = \text{im}(P)$, bilden av P , så har vi att $\mathbf{x} = P\mathbf{z} \in V$ och enligt a) att $\mathbf{y} = \mathbf{z} - P(\mathbf{z}) \in V^\perp$ och

$$P(\mathbf{z}) = \mathbf{x}.$$

Alltså är $P = \text{proj}_V$.