



**Lösningsförslag till tentamen
Modelltentamen**

DEL I – BASALA PROBLEM

1. Beräkna den Jordankanoniska formen för den linjära operatorn $D: P_4 \rightarrow P_4$ som ges av $D(f) = f'(x)$ där P_4 är vektorrummet av polynom av grad högst fyra med komplexa koefficienter.

(4 p)

Lösningsförslag. Om vi väljer basen $\{x^n/n!\}_{n=0}^4$ för P_4 har vi att $D(e_n) = e_{n-1}$ för $n = 1, 2, 3, 4$ och $D(e_1) = 0$. Matrisen för D är därmed

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vilket är den Jordankanoniska formen med ett enda Jordanblock.

Svar. Den Jordankanoniska formen är $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Låt $V \subseteq L^2(S^1_{2\pi}) = L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ vara inre-produktrummet med bas som ges av funktionerna $\sin nx$, för $n = 1, 2, 3$ med den inre produkten

$$\langle f|g \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x) dx.$$

Bestäm matrisen för operatoren $L: V \rightarrow V$ som ges av

$$L(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(x - t) dt$$

med avseende på den givna basen och avgör om operatoren är självdjungerad.

(4 p)

Lösningförslag. Den givna basen är ortogonal och vi kan normera den för att få en ortogonal bas. Vi har att

$$\begin{aligned} L(\sin nx) &= \int_0^{2\pi} \sin nt \cos(x - t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin(nt + x - t) + \sin(nt - (x - t))) dt \\ &= \begin{cases} \pi \sin x & n = 1 \\ -\pi \sin x & n = -1 \\ 0 & n \neq \pm 1. \end{cases} \end{aligned}$$

eftersom $\sin(mt \pm x)$ har medelvärde noll under en hel period utom för $m \neq 0$ då medelvärdet är $\sin(\pm x)$. Matrisen för L med avseende på den givna basen är därmed

$$\begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har sett att den givna basen bestod av egenvektorer med reella egenvärden och eftersom basen är ortogonal betyder det att operatoren är självdjungerad.

Svar. Matrisen är $\begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ och operatoren är självdjungerad.

3. Låt A vara 3×3 -matrisen med element i $\mathbb{Z}_2$ - heltalen modulo 2 - som ges av

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestäm *minimalpolynomet* till A och använd detta för att avgöra om A är diagonaliserbar.

(4 p)

Lösningsförslag. Vi beräknar potenserna A^2 och A^3 och får

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

och

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi kan representera matriserna som rader i en matris genom att lägga raderna efter varandra. Matrisen som motsvarar potenserna A^0 , A^1 , A^2 och A^3 blir då

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eftersom de tre översta raderna är linjärt oberoende har minimalpolynomet grad tre och vi kan använda Gausselimination för att se att summan av raderna är noll. Det gör att minimalpolynomet är $q_A(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Eftersom $q_A(0) = 1$ och $q_A(1) = 0$ har vi bara ett egenvärde och eftersom matrisen inte är en multipel av identitetsmatrisen kan den inte vara diagonaliserbar.

Svar. Minimalpolynomet är $q_A(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ och matrisen är inte diagonaliserbar.

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. För singularvärdesuppdelning av matriser används begreppet *unitära* matriser.

(a) Vad betyder det att en matris är *unitär*?

(1 p)

(b) Ge ett belysande exempel på en unitär 2×2 -matris.

(1 p)

(c) Hur används singularvärdesuppdelning för definition av pseudoinvers?

(1 p)

(d) Ge ett belysande exempel på pseudoinversen av en 3×4 -matris.

(1 p)

Lösningsförslag.

(a) Matrisen A är *unitär* om A är kvadratisk och $AA^\dagger = I$, dvs $A^\dagger = A^{-1}$, där $A^\dagger$ betecknar det Hermiteska transponatet.

(b) För en unitär 2×2 -matris behöver vi två vektorer i $\mathbb{C}^2$ som har längd ett och som är ortogonala mot varandra. Om vi först väljer vektorn

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} \end{bmatrix}$$

har vi att längden är 1 och vi kan sedan se på villkoret att $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ och får

$$\frac{1+i}{2}\bar{v}_1 + \frac{1-i}{2}\bar{v}_2$$

dvs $\bar{v}_1 = i\bar{v}_2$. Med $v_2 = a$ får vi $v_1 = -ia$. För att längden av $\mathbf{v}$ ska vara 1 krävs att $|a|^2 = 1/2$. Vi kan välja $a = 1/\sqrt{2}$ och får att

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}} & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

är unitär.

(c) Vid singularvärdesuppdelning av en $m \times n$ -matris A skriver vi $A = U\Sigma V^\dagger$ där U och V är unitära matriser av storlek $m \times m$, respektive $n \times n$ och Σ är en diagonalmatris där diagonalelementen är icke-negativa reella tal. Vi definierar *pseudoinversen* som $A^+ = V\Sigma^+U^\dagger$ där Σ^+ fås genom att invertera alla nollskilda diagonalelement i Σ . Vi får därmed att $U^\dagger AA^+ U = D$ som är en kvadratisk diagonalmatris av storlek $m \times m$ där diagonalelementen är ett eller noll och motsvarande gäller för $V^\dagger A^+ AV$.

(d) Vi kan ta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\sqrt{3} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Vi har bara ett nollskilt singularvärde och vi får pseudoinversen som

$$A^+ = (2\sqrt{3})^{-1} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. I boken finns en sats som ger sambandet mellan två egenskaper hos ett par diagonaliserbara operatorer på ett ändligdimensionellt vektorrum, att de *kommuterar* och att de är *samtidigt diagonaliserbara*.

(a) Vad betyder de båda egenskaperna?

(1 p)

(b) Vilket är sambandet?

(1 p)

(c) En del av sambandet är enkelt att bevisa. Vilket? Hur bevisar man det?

(2 p)

Lösningsförslag.

(a) Att A och B *kommuterar* betyder att $AB = BA$. Att de är *samtidigt diagonaliserbara* betyder att vi kan hitta en bas för vektorrummet där alla basvektorer är egenvektorer till både A och B . Med avseende på denna bas blir matriserna för de båda operatorerna båda diagonalmatriser.

(b) För ändligdimensionella vektorrum är dessa två egenskaper ekvivalenta för diagonaliserbara operatorer, dvs A och B kommuterar om och endast om de är simultant diagonaliserbara.

(c) Det är lättast att visa att simultant diagonaliserbara operatorer kommuterar i och med att vi med avseende på den gemensamma egenbasen kan representera båda operatorerna med diagonalmatriser. Multiplikationen mellan diagonalmatriser är kommutativ eftersom den sker komponentvis och multiplikationen mellan diagonalelementen är kommutativ.

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Den linjära partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

där k är en nollskild konstant kan analyseras med hjälp av linjära operatorer och deras egenvärden och egenvektorer på vektorrummet $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

- (a) Skriv differentialoperatören $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ som en produkt av två kommuterande operatorer, L_1 och L_2 och bestäm egenvektorerna till var och en av dessa operatorer.

(2 p)

- (b) Visa att egenvektorerna med egenvärde 0 till $L_1 \circ L_2$ kan skrivas som summor av egenvektorer med egenvärde 0 för L_1 respektive L_2 och använd det för att skriva upp den allmänna lösningen till differentialekvationen.

(2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Vi kan skriva $L = L_1 \circ L_2$ där

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{och} \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial x} - k \frac{\partial}{\partial y}$$

Dessa kommuterar eftersom $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ för f i $C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

- (b) Vi kan införa nya variabler u och v så att

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{och} \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Därför behöver vi att

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = k, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 1 \quad \text{och} \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -k,$$

vilket vi får om $x = u + v$ och $y = k(u - v)$. Vi kan nu se att egenvärdena till L_1 är alla reella tal λ och egenvektorerna $g(v) \exp(\lambda u) = g(x/2 - y/2k) \exp(\lambda(x/2 + y/2k))$ för $\lambda \neq 0$. Egenvärdena för L_2 är också alla reella tal och egenvektorerna $h(u) \exp(\lambda v) = h(x/2 + y/2k) \exp(\lambda(x/2 - y/2k))$. För $\lambda = 0$ får vi egenvektorerna $g(v)$ respektive $h(u)$ för godtyckliga funktioner g och h i $C^\infty(\mathbb{R})$.

- (c) Det är klart att funktioner på formen $f(u, v) = h(u) + g(v)$ uppfyller att $L_1 \circ L_2(f) = 0$ eftersom $L_1(h) = 0$ och $L_2(g) = 0$. Om $L_1 \circ L_2(f) = 0$ kan vi se att $L_2(f)(u, v) = g(v)$ för någon funktion g , eftersom $L_2(f) \in \ker L_1$. Därmed får med integration med avseende på v att $f(u, v) = G(v) + h(u)$, där $G'(v) = g(v)$.

7. Låt $L: V \rightarrow V$ vara en operator på ett reellt vektorrum som med basen $\{e_1, e_2, e_3\}$ för V ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Med hjälp av L får vi en avbildning $L \otimes L^*: V \otimes V^* \rightarrow V \otimes V^*$ från den bilinjära avbildningen $V \times V^* \rightarrow V \otimes V^*$ som ges av $(x, \phi) \mapsto L(x) \otimes L^*(\phi)$, för $x \in V$ och $\phi \in V^*$.

- (a) Bestäm matrisen för $L \otimes L^*$ med avseende på basen $\{e_i \otimes e_j^*\}$.

(2 p)

- (b) Bestäm $\det(L \otimes L^*)$. (Ledning: $\det(L) = 7$.)

(2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Vi har att

$$L(e_i \otimes e_j^*) = L(e_i) \otimes L^*(e_j^*) = \left(\sum_{k=1}^3 A_{ki} e_k \right) \otimes \left(\sum_{\ell=1}^3 A_{j\ell} e_\ell^* \right) = \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 A_{ki} A_{j\ell} e_k \otimes e_\ell^*$$

Om vi ordnar basen $\{e_1 \otimes e_1^*, e_2 \otimes e_1^*, e_3 \otimes e_1^*, e_1 \otimes e_2^*, e_2 \otimes e_2^*, e_3 \otimes e_2^*, e_1 \otimes e_3^*, e_2 \otimes e_3^*, e_3 \otimes e_3^*\}$ betyder det att vi får en blockmatris med nio 3×3 -block där varje block är en multipel av matrisen A , dvs

$$B = \begin{bmatrix} A_{11}A & A_{21}A & A_{31}A \\ A_{12}A & A_{22}A & A_{32}A \\ A_{13}A & A_{23}A & A_{33}A \end{bmatrix}$$

dvs

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 1 & -4 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 1 & -1 & -1 & -2 & 2 & 2 \\ -4 & -2 & -4 & -2 & -1 & -2 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & -2 & -2 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -4 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -2 & -2 & -1 & -4 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & 2 & 1 & 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

- (b) Vi kan utvidga koefficienterna till $\mathbb{C}$ där vi kan diagonalisera matrisen eller åtminstone få den på övertriangulär form. När vi sedan ser på matrisen för $L \otimes L^*$ får vi en block-undertriangulär matris varför determinanten är produkten av determinanterna för matriserna på diagonalen. Därmed blir determinanten $(\det(A))^6 = 7^6$. (Det karakteristiska polynomet är $p_A(x) = x^3 + x^2 - 5x - 7$ och eftersom det inte finns några gemensamma delare mellan $p_A(x)$ och $p'_A(x) = 3x^2 + 2x - 5$ kan vi sluta oss till att egenvärdena är distinkta i $\mathbb{C}$ och A är diagonaliserbar över $\mathbb{C}$. På så vis får vi en diagonalmatris även för $L \otimes L^*$.)

Svar.

(a) Se ovan.

(b) $\det(L \otimes L^*) = 7^6$.

8. Följden $\{x_i\}_{i \geq 0}$ definieras genom den linjära rekursionen $x_{i+2} = x_{i+1} + x_i$, för $i \geq 0$ och $x_0 = x_1 = 1$. Bestäm x_{2017} om räkningarna sker i $\mathbb{Z}_{11}$.

(4 p)

Lösningsförslag. Vi kan lösa rekursionen med hjälp av

$$\begin{bmatrix} x_{i+2} \\ x_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{i+1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}.$$

För att hantera detta försöker vi diagonalisera matrisen. Den karakteristiska ekvationen är

$$\det \left(\begin{bmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x \end{bmatrix} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0.$$

Vi kan lösa ekvationen i $\mathbb{Z}_{11}$ genom att prova de elva möjliga rötterna eller genom att använda $x = 1/2 \pm \sqrt{(1/2)^2 + 1} = 6 \pm \sqrt{6^2 + 1} = 6 \pm \sqrt{4} = 6 \pm 2$. Vi får alltså egenvärdena 4 och 8 och vi kan sluta oss till att lösningen kan skrivas som

$$x_i = \alpha 4^i + \beta 8^i$$

Begynnelsevärdena ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 4\alpha + 8\beta = 1 \end{cases}$$

som har lösningen $\alpha = 7/4 = 7 \cdot 3 = 21 = 10$ och $\beta = -3/4 = -9 = 2$. Därmed är $x_i = 2 \cdot 8^i - 4^i$, för $i \geq 0$. Den multiplikativa gruppen i $\mathbb{Z}_{11}$ är cyklisk av ordning 10, så vi får att $x_{2017} = x_7$. Vi får att $\{x_i\}_{i=0}^7 = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10\}$. Alltså är $x_{2017} = 10$.

Svar. $x_{2017} = 10$.

9. Exponentialavbildningen för reella eller komplexa matriser ges av $\exp(A) = \sum_{i=0}^{\infty} A^i/i!$, för A i $M_n(k)$ där $k = \mathbb{R}$ eller $k = \mathbb{C}$.

(a) Visa att $\exp(A) \in \text{SL}_n(\mathbb{R})$ ¹ om och endast om $\text{Tr}(A) = 0$ för A i $M_n(\mathbb{R})$.

(2 p)

(b) Låt $V \subseteq M_2(k)$ ges av $V = \{A \in M_2(k) : \text{Tr}(A) = 0\}$. Avgör om exponentialavbildningen $\exp: V \rightarrow \text{SL}_2(k)$ är surjektiv för $k = \mathbb{R}$ respektive $k = \mathbb{C}$.

(2 p)

Lösningsförslag.

(a) Vi utvidgar koefficienterna till $k = \mathbb{C}$ kan vi använda Jordans normalform och kan därmed välja bas så att matrisen blir övertriangulär med egenvärdena $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ på diagonalen. Därmed blir $\exp(A)$ också övertriangulär med $\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n)$ på diagonalen. Därmed är $\det \exp(A) = \exp(\text{Tr}(A))$ och $\det \exp(A) = 1$ om och endast om $\text{Tr}(A) \in 2\pi i\mathbb{Z}$. För reella matriser händer det precis om spåret är noll.

(b) Vi börjar med fallet $k = \mathbb{R}$. Eftersom spåret är noll har vi att egenvärdena är $\pm\lambda$ eller $\pm i\lambda$ för något reellt tal. I det första fallet är matrisen diagonaliserbar och vi får att $\exp(A)$ har egenvärden $\exp(\lambda)$ och $\exp(-\lambda)$ som båda är positiva, eller $\exp(i\lambda)$ och $\exp(-i\lambda)$ som båda har belopp 1. Det går därmed inte att få matriser som har negativa reella egenvärden utom -1 på detta sätt. Det enda fall som återstår är att matrisen bara har egenvärde 0 och inte är diagonaliserbar. Då får $\exp(A)$ bara egenvärde 1. Alltså är $\exp: V \rightarrow \text{SL}_2(k)$ inte surjektiv för $k = \mathbb{R}$.

För $k = \mathbb{C}$ kan vi använda Jordans normalform och kan skriva matrisen på formen

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

om den inte är diagonaliserbar. Om matrisen ligger i V måste $\lambda = 0$ och vi får

$$\exp\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Om vi börjar med en diagonaliserbar matris i V får vi att $\exp(A)$ också är diagonaliserbar. Därmed finns det inget sätt att få matrisen

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

som $\exp(A)$ för någon matris i V . Däremot skulle vi kunna få den som

$$\exp\left(\begin{bmatrix} i\pi & -1 \\ 0 & i\pi \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi drar slutsatsen att avbildningen inte är surjektiv i något av fallen. (Det reella fallet följer av det komplexa eftersom matrisen vi fann på slutet är reell.)

¹ $\text{SL}_n(k)$ är $n \times n$ -matriser med determinant 1.

Svar.

(b) Avbildningen är inte surjektiv.