



**Lösningsförslag till Tentamen
12 Januari 2021**

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Givet planet

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 49\}$$

Bestäm avståndet mellan planet H och punkten $P = (4, 6, 12)$. (4 p)

Lösningsförslag. Låt $\mathbf{x} = [4, 6, 12]^T$. Då ges avståndet mellan planet H och $\mathbf{x}$ av

$$\|\mathbf{x} - \text{proj}_H \mathbf{x}\|$$

Projektionen $\text{proj}_H \mathbf{x}$ är lika med

$$\text{proj}_H \mathbf{x} = \mathbf{x} - \frac{\langle \mathbf{x} - \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{n}$$

där $\mathbf{n}$ är en normalvektor till planet H och $\mathbf{t}$ är en godtycklig vektor i H .

En normalvektor ges av $\mathbf{n} = [2, 3, 6]^T$ och vi observerar att $\mathbf{t} = \mathbf{n} = [2, 3, 6]^T$ är en vektor i H .

Alltså erhåller vi

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \text{proj}_H \mathbf{x}\| &= \left\| \frac{\langle \mathbf{x} - \mathbf{t}, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{n} \right\| \\ &= \left\| \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} \\ &= 7 \end{aligned}$$

□

Svar. Avståndet mellan H och P är lika med 7.

2. Givet

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestäm rangen, $\text{rank } A$, av A och en bas till nollrummet, $\text{Nul } A$, av A .

(4 p)

Lösningsförslag. Vi betraktar den associerade totalmatrisen av A och använder Gausselimination:

$$\begin{aligned} [A \quad \mathbf{0}] &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Från den reducerade trappstegsmatrisen erhåller vi att parameterformen av $\text{Nul } A$ är lika med

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 - x_4 \\ -2x_3 + 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och därmed att

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

är en bas av $\text{Nul } A$. Speciellt är $\dim \text{Nul } A = 2$, och med rangformeln erhåller vi att

$$\text{rank } A = 4 - \dim \text{Nul } A = 4 - 2 = 2.$$

□

$$\textbf{Svar. } \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ och rank } A = 2$$

3. Givet matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en ortogonal matris P och en diagonalmatris D sådana att $D = P^T A P$. **(4 p)**

(1 poäng av 4 poäng ges för att visa att egenvärdena av A är 1 och 3.)

Lösningsförslag. Matrisen är symmetrisk och har därmed en ortonormerad bas av egenvektorer. Det karakteristiska polynomet ges av

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (2 - \lambda) \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} + 1 \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 - \lambda & 0 \end{bmatrix} \\ &= (2 - \lambda)^2(3 - \lambda) - (3 - \lambda) \\ &= (3 - \lambda)((2 - \lambda) - 1) = (3 - \lambda)^2(1 - \lambda) \end{aligned}$$

vilket visar att egenvärdena är 3 och 1. Motsvarande egenvektorerna ges av nollrummen till matriserna $A - 3I_3$ och $A - I_3$. Gausselimination ger

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket visar att $[0 \ 1 \ 0]^T$, $[1 \ 0 \ 1]^T$, respektive $[-1 \ 0 \ 1]^T$ är egenvektorer. Vi observerar att dessa vektorer är ortogonala mot varandra. Vi får en ortogonal matris P som uppfyller $P^T A P = D$ genom att normera dessa egenvektorer och sätta dem som kolonner i P . Alltså

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

Om vi sätter D som diagonalmatrisen med de motsvarande egenvärdena på diagonalen, alltså

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

då gäller $P^T A P = D$ enligt spektralsatsen.

□

Svar. $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. Låt $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (2, 1)$, $P_3 = (0, 1)$ och $P_4 = (2, 2)$ vara hörnen av en parallelogram $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ och låt $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildningen som ges av

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

Bestäm arean, $\text{area}(T(\Pi))$, av bilden av Π under avbildningen T .

(4 p)

Lösningsförslag. Vi observerar att Π spänns up av

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

eftersom $P_4 = P_2 + P_3$ (betraktade som vektorer). Ytan av Π ges av

$$\text{area } \Pi = |\det[P_2 \quad P_3]| = \left| \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right| = 2.$$

Dessutom gäller

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Alltså får vi att

$$\text{area } T(\Pi) = \left| \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right| \text{area } \Pi = 4 \cdot 2 = 8.$$

□

Svar. Ytan av $T(\Pi)$ är lika med 8.

5. Givet

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en minstakvadratlösning till systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (4 p)

Lösningsförslag. En vektor $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ är en minstakvadratlösning om och endast om den är en lösning till normalekvationen

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$$

Vi har

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

och

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Vi måste alltså lösa systemet

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och erhåller

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -6 \\ -2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Parameterformen av lösningen är

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - 3 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Om vi sätter $x_2 = 0$, till exempel, då erhåller vi att $\hat{\mathbf{x}} = [-3, 0]^T$ är en lösning till normalekvationen och därmed en minstakvadratlösning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

□

Svar. Vektorn $\hat{\mathbf{x}} = [-3, 0]^T$ är en minstakvadratlösning.

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

vara en given matris och låt avbildningen T ges av

$$T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ X \mapsto AX.$$

(i) Visa att T är en linjär avbildning.

(2 p)

(ii) Låt $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ vara en bas av $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ som ges av

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ och } B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm $\mathcal{B}$ -matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ för avbildningen T .

(4 p)

Lösningsförslag. (i) För alla matriser $X, Y \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ och alla skalärer $c \in \mathbb{R}$ gäller

$$T(X + Y) = A(X + Y) = AX + AY = T(X) + T(Y)$$

och

$$T(cX) = A(cX) = c(AX) = cT(X)$$

enligt räknereglererna för matriser. Därmed är T en linjär avbildning.

(ii) Låt

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Vi har

$$T(B_1) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} = a_{11}B_1 + a_{21}B_3,$$

$$T(B_2) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{bmatrix} = a_{11}B_2 + a_{21}B_4,$$

$$T(B_3) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{bmatrix} = a_{12}B_1 + a_{22}B_3,$$

$$T(B_4) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = a_{12}B_2 + a_{22}B_4,$$

och därmed har vi

$$[T]_{\mathcal{B}} = [[T(B_1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_2)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_3)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_4)]_{\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{bmatrix}.$$

□

$$\textbf{Svar. } [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

7. Låt $\mathbb{P}_2 = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2 med en inre produkt definierad som

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

för alla $p(t), q(t) \in \mathbb{P}_2$. Låt $W = \text{span}\{t^2 - 1\}$ vara delrummet av $\mathbb{P}_2$ som spänns upp av polynomet $t^2 - 1$. Bestäm en ortonormal bas för det ortogonala komplementet $W^\perp$.

(6 p)

Lösningsförslag. Låt $r(t) = t^2 - 1$. Eftersom W spänns upp av $r(t)$ är $p(t) \in W^\perp$ ekvivalent med $\langle p(t), r(t) \rangle = 0$. Vi har

$$\langle p(t), r(t) \rangle = p(-1)r(-1) + p(0)r(0) + p(1)r(1) = p(-1) \cdot 0 + p(0) \cdot (-1) + p(1) \cdot 0 = -p(0).$$

Alltså är $p(t) \in W^\perp$ om och endast om $p(0) = 0$. Därmed gäller $W^\perp = \{a_1t + a_2t^2 : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. En bas av $W^\perp$ är $\{t, t^2\}$. Vi observerar att denna bas är en ortogonal bas eftersom

$$\langle t, t^2 \rangle = (-1) \cdot (-1)^2 + 0 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2 = 0.$$

Dessutom gäller

$$\|t\|^2 = (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$\|t^2\|^2 = (-1)^2 \cdot (-1)^2 + 0^2 \cdot 0^2 + 1^2 \cdot 1^2 = 2,$$

alltså $\|t\| = \|t^2\| = \sqrt{2}$.

Vi erhåller att $\mathcal{B} = \left\{ \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t^2}{\sqrt{2}} \right\}$ är en ortonormerad bas av $W^\perp$.

□

Svar. $\mathcal{B} = \left\{ \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t^2}{\sqrt{2}} \right\}$

8. En kvadratisk matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kallas *strikt övertriangulär* om $a_{ij} = 0$ för alla $i \geq j$.

(i) Visa att endast nollmatrisen är både strikt övertriangulär och diagonaliserbar.

(3 p)

(ii) Visa att en strikt övertriangulär $n \times n$ matris, A , uppfyller att $A^n = 0$.

(3 p)

Lösningsförslag. (i): Eftersom A är övertriangulär är egenvärdena lika med elementerna på diagonalen. Alltså är 0 den enda egenvärde med den algebraiska multipliciteten n . Egenrummet är lika med nullrummet av $A - 0 \cdot I_n = A$. Om A är inte lika med nollmatrisen, då finns det en icke-noll kolonn i A . Därmed är $\text{rank } A > 0$, och vi få $\dim \text{Nul } A = n - \text{rank } A < n$ enligt rangformeln. Alltså är den geometriska multipliciteten $\dim \text{Nul } A$ mindre än den algebraiska multipliciteten och A är inte diagonaliserbar. Alltså måste A vara lika med nollmatrisen vilken är diagonaliserbar och strikt övertriangulär.

(ii): För varje $1 \leq i \leq n$ låt $W_i = \text{span}\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i\}$ och $W_0 = \{\mathbf{0}\}$. För en godtycklig vektor

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_i \mathbf{e}_i$$

in W_i gäller

$$\begin{aligned} A(\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_i \mathbf{e}_i) &= \lambda_1 A\mathbf{e}_1 + \lambda_2 A\mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_i A\mathbf{e}_i \\ &= \sum_{j=1}^i \lambda_j \sum_{k=1}^{j-1} a_{kj} \mathbf{e}_k \end{aligned}$$

Speciellt gäller $A\mathbf{v} \in W_{i-1}$ och därmed $T_A(W_i) \subseteq W_{i-1}$.

Om vi använder T_A n gånger på $W_n = \mathbb{R}^n$ då erhåller vi

$$T_A^n(W_n) \subseteq T_A^{n-1}(W_{n-1}) \subseteq T_A^{n-2}(W_{n-2}) \subseteq \dots \subseteq T_A(W_1) \subseteq W_0 = \{\mathbf{0}\}$$

Alltså är T_A^n lika med nollavbildningen och därmed A^n lika med nollmatrisen.

□