



**Lösningsförslag till tentamen
10 Januari 2020**

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildningen som ges av

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Bestäm en matris A sådan att $T^{-1}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. (4 p)

Lösningsförslag. Vi beräknar först produkten av matriserna till

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Matrisen för inversavbildningen ges då av inversmatrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 5 - 4 \cdot 4} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

där vi kan kontrollera att

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -5 \cdot 2 + 4 \cdot 4 & -5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 & 4 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Svar. $A = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 4 & 3 & 29 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas till nollrummet $\text{Nul}A$ och en bas till radrummet $\text{Row}A$. (4 p)

Lösningsförslag. Varken radrum eller nollrum ändras vid elementära radoperationer. Vi utför Gausselimination där vi börjar med att ordna om raderna och får

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 4 & 3 & 29 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} R_3 \\ R_1 - 2R_3 \\ R_2 - 4R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} R_1 - 2R_2 \\ R_2 \\ R_3 + 5R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De två nollskilda raderna är nu linjärt oberoende och utgör en bas för radrummet. Nollrummet fås genom att sätta en parameter för de variabler som motsvarar kolonnerna utan ledande etta i det homogena linjära ekvationssystemet $A\mathbf{x} = 0$. Därmed får vi lösningarna

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

och vektorn $[-8 \ 1 \ 1]^T$ utgör en bas för nollrummet. □

Svar. $\{[1 \ 0 \ 8]^T, [0 \ 1 \ -1]^T\}$ utgör en bas för radrummet och $\{[-8 \ 1 \ 1]^T\}$ utgör en bas för nollrummet.

3. Givet matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en ortogonal matris P och en diagonalmatris D sådan att $D = P^T A P$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Matrisen är symmetrisk och har därmed en ortogonal bas av egenvektorer. Det karakteristiska polynomet ges av

$$\det(xI_3 - A) = \det \begin{bmatrix} x-3 & 0 & 0 \\ 0 & x & -2 \\ 0 & -2 & x \end{bmatrix} = (x-3)(x^2-4) = (x-3)(x-2)(x+2)$$

vilket visar att egenvärdena är 3, 2 och -2 . Motsvarande egenvektorer ges av nollrummen till matriserna $3I_3 - A$, $2I_3 - A$ och $-2I_3 - A$. Gausselimination ger

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket visar att egenvektorerna är $[1 \ 0 \ 0]^T$, $[0 \ 1 \ 1]^T$, respektive $[0 \ 1 \ -1]^T$.

Vi får en ortogonal matris P som uppfyller $P^T A P = D$ genom att normera dessa egenvektorer och sätta som kolonner i P . Alltså

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

vilket ger

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

□

Svar. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$

4. Låt

$$H_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}$$

och

$$H_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 9\}$$

vara två parallella plan i $\mathbb{R}^3$. Bestäm avståndet mellan H_1 och H_2 .

(4 p)

Lösningsförslag. Planen är parallella och har samma normalvektor. Genom att välja en godtycklig vektor mellan planen och projicera den på normalvektorn kan vi beräkna avståndet mellan planen. Origo ligger i H_1 och $(9, 0, 0)$ ligger i H_2 . Alltså går vektorn $\mathbf{x} = [9 \ 0 \ 0]^T$ mellan planen. En normalvektor är $\mathbf{n} = [1 \ -2 \ -2]^T$ och projektionen av $\mathbf{x}$ på $\mathbf{n}$ ges av

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} = \frac{9 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot (-2)}{1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2)} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{9}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Avståndet mellan planen är nu $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$. □

Svar. Avståndet mellan planen är 3 längdenheter.

5. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en minstakvadratlösning till matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (4 p)

Lösningsförslag. Minsta kvadratlösningen ges som lösningen till normalekvationen $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$. Vi beräknar normalekvationen genom

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi löser normalekvationen med hjälp av inversmatrisen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot 2 - 1 \cdot 1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

Svar. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt n vara ett naturligt tal och

$$V_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T = -A\}.$$

- (a) Visa att V_n är ett delrum av vektorrummet $\mathbb{R}^{n \times n}$ av $n \times n$ -matriser. (2 p)
(b) Bestäm en bas för V_n . (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Vi ska visa att V_n innehåller nollvektorn och att det är slutet under addition och multiplikation med skalär. Nollmatrisen ligger i V eftersom $0^T = -0$. Om A och B ligger i V_n har vi att $A^T = -A$ och $B^T = -B$. Därmed får vi att $(A+B)^T = A^T + B^T = -A + (-B) = -(A+B)$, vilket visar att även $A+B$ ligger i V_n . Om a är en skalär får vi att $(aA)^T = aA^T = a(-A) = -(aA)$, vilket visar att också aA ligger i V_n . Därmed har vi visat att V_n är ett delrum av vektorrummet av alla $n \times n$ -matriser.
- (b) Om $A = (a_{ij})$ ligger i V_n har vi att $a_{ij} = -a_{ji}$ för alla i, j från 1 till n . Om $i = j$ ger det $a_{ii} = 0$ och om $i < j$ kan vi lösa ut a_{ij} från a_{ji} som $a_{ij} = -a_{ji}$. Vi har därmed att alla element a_{ij} med $i > j$ kan väljas som parametrar och alla övriga element blir bestämda av dessa. Därmed är dimensionen för V_n lika med $n(n-1)/2$ och en bas ges av matriserna $A_{ij}, i > j$ med

$$(A_{ij})_{k\ell} = \begin{cases} 1 & \text{om } k = i \text{ och } \ell = j, \\ -1 & \text{om } k = j \text{ och } \ell = i, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

□

7. Låt

$$\mathbb{P}_3 = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 3. Låt $T: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ vara den linjära avbildning som definieras genom

$$T(p(t)) = (t+1)p'(t)$$

för alla polynom $p(t) \in \mathbb{P}_3$. Bestäm en bas $\mathcal{B}$ för $\mathbb{P}_3$ sådan att $\mathcal{B}$ -matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ är en diagonalmatris. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi väljer en bas $\mathcal{E}$ för $\mathbb{P}_3$ som ges av de fyra polynomen $1, t, t^2$ och t^3 . Matrisen för T med avseende på denna bas beräknas genom att se på bilderna av polynomen. Vi får $T(1) = (t+1) \cdot 0$, $T(t) = (t+1) \cdot 1 = t+1$, $T(t^2) = (t+1) \cdot 2t = 2t^2 + 2t$ och $T(t^3) = (t+1) \cdot 3t^2 = 3t^3 + 3t^2$ vilket ger matrisen

$$A = [T]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

där kolonnerna utgör koordinatvektorerna för bilderna av basvektorerna i basen $\mathcal{E}$. Vi vill nu hitta en annan bas $\mathcal{B}$ så att matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ blir en diagonalmatris. Detta betyder att vi vill diagonalisera matrisen A . Eftersom A är övertriangulär ser vi att egenvärdena är 0, 1, 2 och 3. Vi får egenvektorerna genom att beräkna nollrummen till $\lambda I_4 - A$ för dessa fyra egenvärden. Vi får

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Detta ger egenvektorerna $[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $[1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$, $[1 \ 2 \ 1 \ 0]^T$, $[1 \ 3 \ 3 \ 1]^T$ som motsvarar polynomen $1, t+1, t^2+2t+1 = (t+1)^2$ och $t^3+3t^2+3t+1 = (t+1)^3$. Med avseende på denna bas blir matrisen

$$D = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

□

Svar. $\mathcal{B} = \{1, t+1, (t+1)^2, (t+1)^3\}$

8. Låt n vara ett naturligt tal och låt $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ vara $n-1$ vektorer. Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vara definierad genom

$$x_i = \det [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_{n-1} \ \mathbf{e}_i] \quad \text{för } i = 1, 2, \dots, n,$$

där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ betecknar standardenhetsvektorerna i $\mathbb{R}^n$.

(a) Visa att $\det [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_{n-1} \ \mathbf{x}] = \|\mathbf{x}\|^2$. (2 p)

(b) Visa att $\mathbf{x} \in (\text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}\})^\perp$. (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Vi har att determinanten är en linjär funktion om vi fixerar de $n-1$ första kolonnerna till bara varierar den sista. Eftersom $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$ får vi

$$\det [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_{n-1} \ \mathbf{x}] = \sum_{i=1}^n x_i \det [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_{n-1} \ \mathbf{e}_i] = \sum x_i^2 = \|\mathbf{x}\|^2$$

vilket skulle visas.

- (b) Vi kan utveckla vektorerna $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ i standardbasen och får då $\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} \mathbf{e}_i$. Vi använder på nytt linjäriteten hos determinanten och att determinanten är noll om en kolonn upprepas för att se att

$$0 = \det [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_{n-1} \ \mathbf{a}_j] = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i = \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{x}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

vilket visar att $\mathbf{x}$ är ortogonal mot alla vektorerna $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$. Därmed ligger $\mathbf{x}$ i det ortogonala komplementet $(\text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}\})^\perp$.

□