

TENTAMEN, DEL 2
SF1544
NUMERISKA METODER, GRUNDKURS
Tisdag 3 juni 2025 kl 14.00-17.00

Rättas endast om Del 1 är godkänd.

Betygsgräns: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Maximalt antal poäng 50.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas detaljerat. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

Skriv namn och personnummer på varje blad. Skriv inte på baksidan av pappret.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

P1. En kaninpopulation $u(t)$ växer med tiden t enligt en logistiskt tillväxtmodell

$$\frac{du}{dt} = ru \left(1 - \frac{u}{K}\right), \quad u(0) = u_0.$$

Bärförmågan K och tillväxthastigheten r antas vara konstanta. Denna ekvation har då en exakt lösning som ges av

$$u(t) = \frac{Ku_0}{u_0 + (K - u_0)e^{-rt}}.$$

- (6p) (a) Vid tiden T minskar vegetationstillgången på grund av överbete, vilket leder till att den maximala populationen som kan överleva minskar enligt

$$u_{\max}(T) = \frac{A}{T + 1}, \quad A > 0.$$

Här representerar A den initiala vegetationstillgången vid $t = 0$.

Formulera Newtons metod för att bestämma tiden T då kaninpopulationen når denna resursbegränsning. Inkludera en tydlig definition av alla ingående storheter och funktioner som används i metoden.

- (5p) (b) Antag att det finns osäkerhet i initiala vegetationstillgången A , betecknad E_A , och i bärförmågan K , betecknad E_K . Beskriv i detalj hur du kan använda metoden i (a) tillsammans med en experimentell störningsanalys för att bestämma osäkerheten i tiden T , betecknad E_T . Du kan anta att A, K, E_A, E_K är kända.

- (5p) (c) Antag nu att det finns en rävpopulation $v(t)$ som jagar kaniner. Systemet kan beskrivas som

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= ru \left(1 - \frac{u}{K}\right) - puv, \\ \frac{dv}{dt} &= cuv - dv, \end{aligned}$$

där p är en predatorskoefficient, c en tillväxtkoefficient för rävar beroende på kaniner och d en dödscoefficient för rovdjur. Initialvillkoren ges av $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$.

Systemet ovan går inte att lösa analytiskt utan lösningen behöver approximeras med hjälp av en numerisk metod. Formulera Euler framåt för systemet. Inkludera en tydlig definition av alla ingående storheter som används i metoden.

P2. Följande differentialekvation är given

$$u''(t) + 2u'(t) + 4u(t) = t \quad u(0) = 2 \quad u(1) = \alpha \quad (1)$$

där α är en okänd parameter som bestäms från villkoret

$$\int_0^1 u(t) \, dt = \alpha \quad (2)$$

- (10 p) (a) Dela in intervallet $0 \leq t \leq 1$ i 4 delintervall och approximera differentialekvationen (1) och integralekvationen (2) med metoder som har minst noggrannhetsordning 2. Resultatet blir ett linjärt ekvationssystem. Skriv i detalj upp ekvationerna som utgör det linjära ekvationssystemet samt ange systemet på formen $A\vec{x} = \vec{b}$. Du behöver inte lösa systemet med var noga med att definiera alla variabler du använder.
- (4 p) (b) Förklara med ord och formler på vilket sätt du kan kontrollera att din metod ger korrekt noggrannhetsordning vid beräkningen av variabeln α . Vilken noggrannhetsordning förväntar du dig att metoden har?

P3. Den här uppgiften handlar till stor del om trapetsregeln, men börjar med en differensformel.

- (7p) (a) Vi vill konstruera en differensformel, $D_h^L f(x)$ på följande form

$$D_h^L f(x) = \frac{a}{h} f(x) + \frac{b}{h} f(x+h) + \frac{c}{h} f(x+2h),$$

sådan att $f'(x) - D_h^L f(x) = O(h^2)$, givet en steglängd $h > 0$ och f en oändligt deriverbar funktion. Dvs vi måste bestämma koefficienterna a , b och c så att approximationen har noggrannhetsordning 2.

Visa att koefficienterna a , b och c måste uppfylla följande ekvationssystem för att approximationen $D_h^L f(x)$ ska ha noggrannhetsordning 2:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ b + 2c &= 1 \\ b + 4c &= 0. \end{aligned}$$

Bestäm sedan a , b och c , och ange uttrycket för feltermen som är proportionell mot h^2 .

Notera att i differensformeln $D_h^L f(x)$ ovan så används funktionsvärden i x , $x+h$ och $x+2h$. Om man istället använder funktionsvärden i x , $x-h$ och $x-2h$ och definierar $D_h^R f(x) = -\frac{a}{h} f(x) - \frac{b}{h} f(x-h) - \frac{c}{h} f(x-2h)$, så gäller då för samma värden på a, b och c att $f'(x) - D_h^R f(x) = O(h^2)$.

Uppgiften fortsätter på nästa sida.

- (7p) (b) Vi kan använda trapetsregeln för att approximera integralen

$$I[f] = \int_0^1 f(x)dx,$$

där f är en oändligt deriverbar funktion. Givet ett heltal N , låt steglängden för trapetsregeln vara $h = 1/N$, med punkter uniformt spridda i intervallet $[0, 1]$, så att $x_\ell = \ell h$, $\ell = 0, \dots, N$. Låt $T_h[f]$ beteckna approximationen med trapetsregeln av $I[f]$. Genom Euler Maclaurins felformel så vet vi då att följande gäller

$$I[f] = T_h[f] + \frac{h^2}{12}(f'(0) - f'(1)) - \frac{h^4}{720}(f'''(0) - f'''(1)) + O(h^6)$$

- i) Definiera $T_h[f]$, dvs ange formeln för trapetsregeln.
- ii) Ange en funktion för vilken trapetsregeln är exakt, dvs $T_h[f] = I[f]$.
- iii) Vilken noggrannhetsordning erhålls för trapetsregeln för $f(x) = e^x$?
- iv) Vilken noggrannhetsordning erhålls för trapetsregeln för $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$?
- v) Ange en funktion för vilken trapetsregeln inte är exakt men har noggrannhetsordning högre än 4.

- (6p) (c) Använd ovanstående information för att definiera en modifierad trapetsregel $\tilde{T}_h[f]$ som approximerar $I[f]$ med fjärde ordningens noggrannhet för en godtycklig oändligt deriverbar funktion f . Motivera din konstruktion och visa att den ger fjärde ordningens noggrannhet.