



KTH Teknikvetenskap

SF1672 Linjär algebra
Tentamen tisdag, 11 april 2023, 08:00–13:00

Skrivtid: 5 timmar

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Tilman Bauer

Tentamen består av åtta uppgifter. Del I utgörs av fem uppgifter som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av tre uppgifter som testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg.

Bonuspoäng från del I av inlämningsuppgifterna och från quizzarna adderas till erhållna poäng på del I. Bonuspoäng från del II av inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del II. (Bonuspoäng räknas bara under samma läsår och inte vid plussning.)

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell, där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Del I	16	16	16	16	16	15
Del II	14	11	8	4	–	–

Del II av tentamen rättas inte om mindre än 16 poäng är uppnådda på del I.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden tilldelas inte full poäng.

Del I

1. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{array}{rclcl} 3x & +y & & = & 1 \\ ax & +y & +z & = & a \\ x & +y & +az & = & 3. \end{array}$$

- För vilka värden på a har systemet en unik lösning, ingen lösning, respektive oändligt många lösningar? (2 p)
- Bestäm lösningsmängden i det/de fall där oändligt många lösningar finns. (2 p)

2. Låt L vara reflektionen i planet $x + 2y - z = 0$ i $\mathbb{R}^3$.

a) Bestäm standardmatrisen till avbildningen L . **(2 p)**

b) Bestäm avbildningens egenvärden och egenvektorer. **(2 p)**

3. Finn de värden på a, b så att funktionen $f(x) = ax + bx^2$ i minstakvadratmeningen bäst approximerar mätvärdena

x	$f(x)$
-2	3
-1	1
1	2
2	4.

(4 p)

4. Låt

$$\mathbf{v} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

och låt $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara rotationen kring axeln som spänns upp av $\mathbf{v}$ med vinkel $\pi/4$ i den riktning som ges av högerhandregeln när tummen pekar i riktning av $\mathbf{v}$.

a) Bestäm en ortonormalbas $\mathcal{B}$ som innehåller $\mathbf{v}$. **(1 p)**

b) Bestäm matrisen $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ för transformationen T med avseende på basen $\mathcal{B}$. **(1 p)**

c) Bestäm standardmatrisen $[T]$ för T . **(2 p)**

5. Den linjära avbildningen $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uppfyller:

$$T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Beräkna volymen av $T(Q)$, där Q är kuben som spänns upp av standardbasvektorerna.
OBS: Du behöver inte räkna ut någon avbildningsmatris till T . **(4 p)**

Del II

6. Vi kallar en linje L genom origo en *invariant linje* för en linjär transformation $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ om $T(L) \subseteq L$, d.v.s. om T avbildar punkter i L på punkter i L .
- Visa att varje linjär transformation $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ har en invariant linje. **(3 p)**
 - Visa genom att ge ett konkret motexempel att det finns linjära transformation $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ utan invariant linje. *OBS: Du behöver ange en konkret linjär transformation T , t. ex. genom att ange en matris, och motivera varför ingen invariant linje kan finnas för denna T .* **(3 p)**
7. Betrakta följande punkter i $\mathbb{R}^3$:
- $$P = (0, 3, 1), \quad Q = (2, 1, 1) \quad \text{och} \quad R = (1, 1, 2).$$
- Låt L vara mängden av alla punkter i $\mathbb{R}^3$ som har samma avstånd till P , Q och R . Till exempel ligger punkten $Y = (0, 1, 0)$ i mängden L då avståndet från Y till var och en av punkterna är lika med $\sqrt{5}$.
- Visa att L är en linje och bestäm en parameterform för L . **(3 p)**
 - Bestäm det minsta avståndet av L till punkterna. **(3 p)**
8. Låt $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en linjär transformation som uppfyller $P^2 = P$ samt $\|P\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v}\|$ för alla $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.
- Visa att bildrummen av P och $I_n - P$ är ortogonala. **(4 p)**
 - Visa att P är en ortogonal projektion på ett delrum av $\mathbb{R}^n$. **(2 p)**