

TENTAMEN TEORETISK FYSIK SI1155/SI1151

Torsdag 200813 kl 08:00-13:00

Skriv på varje sida	Namn och problemnummer
Motivera noga	Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag
Hjälpmedel	BETA, miniräknare
Poängsättning	6 poäng per problem
Examinator	Mats Wallin tel 073 765 2000

Obligatorisk hederkodex: Skriv följande text på ett tomt papper:

Jag försäkrar att jag har tagit del av och kommer att följa de regler som gäller för tentamen i kursen Teoretisk fysik. Jag kommer inte att använda några otillåtna hjälpmedel och jag kommer att lösa uppgifterna självständigt utan hjälp från någon annan.

Skriv under med datum, namnteckning och namnförtydligande. Pappret med din underskrivna hederskodex ska scannas och lämnas in elektroniskt i samma fil som dina lösningar för denna tentamen. Tentor som lämnas in utan underskriven hederskodex kommer att anses ogiltiga och kommer inte att rättas.

1. En partikel med massa m är i en endimensionell oändlig potentiallåda med $V(x) = 0$ för $0 < x < a$ och $V(x) = \infty$ för övrigt. Vid tiden $t = 0$ är vågfunktionen

$$\Psi(x, t = 0) = C \left(\sqrt{2/a} \sin(\pi x/a) + \sqrt{2/a} \sin(3\pi x/a) \right), \quad 0 \leq x \leq a$$

där C är en konstant. Bestäm värdet på C , vågfunktionen vid tiden $t \geq 0$, samt energins väntevärde och osäkerhet vid tiden $t \geq 0$.

2. En elektronstråle med energin $E > 0$ riktas i x-riktningen från $x < 0$ mot ett potentialsteg som ges av

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ -V_0 & x > 0 \end{cases}$$

där $V_0 > 0$. Bestäm reflektions- och transmissionskoefficienterna. Bortse från elektronernas växelverkan med varandra. Svaret ska förenklas så långt som möjligt och uttryckas i kvantiteten V_0/E .

3. En partikel i en tvådimensionell harmonisk oscillatorpotential har den ostörda Hamiltonoperatoren

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$$

Oscillatorn störs av potentialen $V(x, y) = Cm\omega^2xy$ där C är en konstant. Använd störningsräkning för att bestämma första ordningens korrektion till energin hos (a) grundtillståndet och (b) första exciterade tillståndet.

4. En väteatom är i ett homogent (dvs samma i alla punkter) tidsberoende elektriskt fält riktat i z-riktningen med storlek $E(t) = Ae^{-(t/\tau)^2}$ där A, τ är konstanter. Väteatomen är i grundtillståndet vid tiden $t = -\infty$. Använd tidsberoende störningsräkning för att beräkna sannolikheten att väteatomen har exciterats till första exciterade tillståndet vid tiden $t = +\infty$.

Formel hjälp:

I detta fall ges tidsberoende störningsräkning av $c_b(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t \langle b|V(t')|a \rangle e^{i\omega_0 t'} dt'$ där $\hbar\omega_0 = E_b - E_a$.

Vätevågfunktioner: $\Psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi)$

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\phi}$$

$$R_{10} = 2a^{-3/2}e^{-r/a}, R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{r}{2a}\right)e^{-r/2a}, R_{21} = \frac{1}{2\sqrt{6}}a^{-3/2}\frac{r}{a}e^{-r/2a}$$

5. Fyra identiska spinn-1/2 partiklar är placerade i hörnen av en kvadrat och växelverkar med Hamiltonoperatören

$$H = -J(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_4 + \mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_1)$$

där $J > 0$ är en konstant. Uppskatta grundtillståndsenergien med ett variationsargument.

LYCKA TILL!

Lösning till tentamen i Teoretisk fysik 200813

1. En partikel med massa m är i en endimensionell oändlig potentiallåda med $V(x) = 0$ för $0 < x < a$ och $V(x) = \infty$ för övrigt. Vid tiden $t = 0$ är vågfunktionen

$$\Psi(x, t = 0) = C \left(\sqrt{2/a} \sin(\pi x/a) + \sqrt{2/a} \sin(3\pi x/a) \right), \quad 0 \leq x \leq a$$

där C är en konstant. Bestäm värdet på C , vågfunktionen vid tiden $t \geq 0$, samt energins väntevärde och osäkerhet vid tiden $t \geq 0$.

Energiegenfunktionerna är $\Psi_n(x) = \sqrt{2/a} \sin(n\pi x/a)$. I egenfunktionsexpansionen $\Psi = \sum_n c_n \Psi_n$ fås $c_1 = c_3 = C$ och övriga $c_n = 0$. Normering:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = |c_1|^2 + |c_3|^2 = 2|C|^2 = 1 \Rightarrow \text{välj } C = 1/\sqrt{2}$$

Vågfunktionen vid tiden t blir

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n \Psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1(x) e^{-iE_1 t/\hbar} + \Psi_3(x) e^{-iE_3 t/\hbar})$$

där $E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2ma^2}$.

Energins väntevärde är oberoende av tiden:

$$\langle E \rangle = \sum_n E_n |c_n|^2 = \frac{1}{2} (E_1 + E_3) = \frac{1^2 + 3^2}{2} \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} = 5 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

Väntevärdet av energin i kvadrat:

$$\langle E^2 \rangle = \sum_n E_n^2 |c_n|^2 = \frac{1}{2} (E_1^2 + E_3^2) = \frac{1^4 + 3^4}{2} \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \right)^2 = 41 \left(\frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \right)^2$$

Energins osäkerhet är tidsberoende:

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = \sqrt{41 - 5^2} \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} = 4 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

2. En elektronstråle med energin $E > 0$ riktas i x-riktningen från $x < 0$ mot ett potentialsteg som ges av

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ -V_0 & x > 0 \end{cases}$$

där $V_0 > 0$. Bestäm reflektions- och transmissionskoefficienterna. Bortse från elektronernas växelverkan med varandra. Svaret ska förenklas så långt som möjligt och uttryckas i kvantiteten V_0/E .

Lösningen till SE är

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, & x < 0 \\ Ce^{ik_1x}, & x > 0 \end{cases}$$

där $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, $k_1 = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar$.

Kontinuitetsvillkor:

$$\Psi(0) = A + B = C, \quad \Psi'(0) = ik(A - B) = ik_1C$$

Eliminera C :

$$k(A - B) = k_1(A + B)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{k_1 - k}{k_1 + k}$$

Reflektionskoefficienten blir

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left| \frac{k_1 - k}{k_1 + k} \right|^2 = \left| \frac{\sqrt{E + V_0} - \sqrt{E}}{\sqrt{E + V_0} + \sqrt{E}} \right|^2 = \left| \frac{\sqrt{1 + r} - 1}{\sqrt{1 + r} + 1} \right|^2$$

där $r = V_0/E$. Transmissionskoefficienten fås mha $T + R = 1$:

$$T = 1 - R = 1 - \frac{(\sqrt{1 + r} - 1)^2}{(\sqrt{1 + r} + 1)^2} = \frac{(\sqrt{1 + r} + 1)^2 - (\sqrt{1 + r} - 1)^2}{(\sqrt{1 + r} + 1)^2} = \frac{4\sqrt{1 + r}}{(\sqrt{1 + r} + 1)^2}$$

Kontroll: För $V_0 = 0$ blir $R = 0$, $T = 1$ som väntat.

3. En partikel i en tvådimensionell harmonisk oscillatorpotential har den ostörda Hamilton-operatoren

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$$

Oscillatorn störs av potentialen $V(x, y) = Cm\omega^2xy$ där C är en konstant. Använd störningsräkning för att bestämma första ordningens korrektion till energin hos (a) grundtillståndet och (b) första exciterade tillståndet.

(a) Den ostörda grundtillståndsenergin är $E_0^0 = 2 \cdot \frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega$ och det ostörda grundtillståndet är $|n_x = 0\rangle|n_y = 0\rangle = |0, 0\rangle$. Första ordningens korrektion till grundtillståndsenergin:

$$E_0^1 = \langle 0, 0|V|0, 0\rangle = Cm\omega^2\langle 0|x|0\rangle\langle 0|y|0\rangle = 0$$

mha $\langle 0|x|0\rangle = \langle 0|y|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 0|(a^\dagger + a)|0\rangle = 0$.

(b) Det ostörda första exciterade tillståndet är tvåfalt degenererat: $\Psi_a = |0\rangle|1\rangle$, $\Psi_b = |1\rangle|0\rangle$ med energi $E_1^0 = (n_1 + 1/2)\hbar\omega + (n_2 + 1/2)\hbar\omega = 2\hbar\omega$. Störningsmatrisens element:

$$W_{aa} = \langle 0, 1|V|0, 1\rangle = Cm\omega^2\langle 0|x|0\rangle\langle 1|y|1\rangle = 0 = W_{bb}$$

$$W_{ab} = \langle 0, 1|V|1, 0\rangle = Cm\omega^2\langle 0|x|1\rangle\langle 1|y|0\rangle = C\frac{\hbar\omega}{2}\langle 0|(a^\dagger + a)|1\rangle\langle 1|(a^\dagger + a)|0\rangle = C\frac{\hbar\omega}{2}2m\omega = W_{ba}$$

mha $\langle 0|a|1\rangle = \langle 1|a^\dagger|0\rangle = 1$, $\langle 1|a|0\rangle = \langle 0|a^\dagger|1\rangle = 0$. Energikorrektionerna ges av egenvärdena till W :

$$\begin{vmatrix} -E^1 & C\frac{\hbar\omega}{2} \\ C\frac{\hbar\omega}{2} & -E^1 \end{vmatrix} = (E^1)^2 - \left(C\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2 = 0$$

$$E_\pm^1 = \pm C\frac{\hbar\omega}{2}$$

4. En väteatom är i ett homogent (dvs samma i alla punkter) tidsberoende elektriskt fält riktat i z-riktningen med storlek $E(t) = Ae^{-(t/\tau)^2}$ där A, τ är konstanter. Väteatomen är i grundtillståndet vid tiden $t = -\infty$. Använd tidsberoende störningsräkning för att beräkna sannolikheten att väteatomen har exciterats till första exciterade tillståndet vid tiden $t = +\infty$.

Den störande potentialen är $V(t) = -qE(t)z = eE(t)r \cos \theta$ där $q = -e$ är elektronladdningen. Koefficienten för det exciterade tillståndet vid $t = \infty$ blir

$$c_{2lm} = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle 2lm | V(t') | 100 \rangle e^{i\omega_0 t'} dt' = \frac{e}{i\hbar} \langle 2lm | r \cos \theta | 100 \rangle A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t'/\tau)^2} e^{i\omega_0 t'} dt'$$

Gör först tidsintegralen mha kvadratkomplettering (övning 1 tal 9)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t'/\tau)^2} e^{i\omega_0 t'} dt' = \tau \sqrt{\pi} e^{-\omega_0^2 \tau^2 / 4}$$

Störningen kan skrivas om mha $\cos \theta = \sqrt{4\pi/3} Y_1^0$. De flesta matriselementen är noll pga ortogonalitet mellan klotfunktioner:

$$\langle 200 | r \cos \theta | 100 \rangle = 0, \langle 21 \pm 1 | r \cos \theta | 100 \rangle = 0$$

Beräkna det enda nollskilda matriselementet:

$$\begin{aligned} \langle 210 | r \cos \theta | 100 \rangle &= \langle R_{21} | r | R_{10} \rangle \langle Y_1^0 | Y_1^0 \rangle \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{6}} a^{-4} \int_0^\infty r^2 e^{-r/2a} e^{-r/a} r^2 dr \\ &= \frac{a}{3\sqrt{2}} \int_0^\infty r^4 e^{-3r/2} dr = \frac{a}{3\sqrt{2}} \frac{4!}{(3/2)^5} = \frac{2^7 \sqrt{2}}{3^5} a \end{aligned}$$

Samla ihop:

$$c_{210} = \frac{2^7 \sqrt{2\pi}}{3^5} \frac{eaA\tau}{i\hbar} e^{-\omega_0^2 \tau^2 / 4}$$

Den sökta sannolikheten blir

$$|c_{210}|^2 = \frac{2^{15} \pi}{3^{10}} \left(\frac{eaA\tau}{\hbar} \right)^2 e^{-\omega_0^2 \tau^2 / 2}$$

5. Fyra identiska spinn-1/2 partiklar är placerade i hörnen av en kvadrat och växelverkar med Hamiltonoperatoren

$$H = J(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_4 + \mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_1)$$

där J är en konstant. Uppskatta grundtillståndsenergin med ett variationsargument.

Variationsuppskattningen av grundtillståndsenergin fås genom att minimera väntevärdet

$$\langle H \rangle = J(\langle \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \rangle + \langle \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 \rangle + \langle \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{S}_4 \rangle + \langle \mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{S}_1 \rangle)$$

Eftersom $J > 0$ minimeras termen $\langle S_{1z} S_{2z} \rangle$ av $\uparrow\downarrow$ eller $\downarrow\uparrow$ som kallas antiferromagnetiska. Tag därför ansatsen

$$\chi = \uparrow_1 \downarrow_2 \uparrow_3 \downarrow_4$$

Väntevärden av skalärprodukterna mellan spinnen beräknas så här:

$$\begin{aligned} \langle \uparrow\downarrow | \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 | \uparrow\downarrow \rangle &= \langle \uparrow | S_{x,1} | \uparrow \rangle \langle \downarrow | S_{x,2} | \downarrow \rangle + \langle \uparrow | S_{y,1} | \uparrow \rangle \langle \downarrow | S_{y,2} | \downarrow \rangle + \langle \uparrow | S_{z,1} | \uparrow \rangle \langle \downarrow | S_{z,2} | \downarrow \rangle \\ &= (1,0) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0,1) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &+ (1,0) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0,1) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &+ (1,0) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0,1) \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 0 + 0 + \frac{\hbar}{2} \frac{-\hbar}{2} = -\frac{\hbar^2}{4} \end{aligned}$$

Uppskattningen av energin blir

$$E_0 = -4J \frac{\hbar^2}{4} = -J\hbar^2$$

Notera att tillståndet är inte ett egentillstånd till H eftersom $S_x \uparrow = \frac{\hbar}{2} \downarrow$, $S_y \uparrow = i \frac{\hbar}{2} \downarrow$ osv. Uppskattningen ger därför endast en övre gräns för grundtillståndsenergin.