



SF1683 Differentialekvationer och transformmetoder, del 1
Tentamen
Måndag den 20 december 2021

Skrivtid: 08:00-12:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mattias Dahl

Tentamen består av sex uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de fyra första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del I upp till maximalt 16 poäng.

Betygsgränserna vid tentamen ges av följande tabell.

Fx	E	D	C	B	A
11	12	14	16	19	21

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. (a) Bestäm den lösning till ekvationen

$$y' + 2xy = 0, \quad y = y(x),$$

som uppfyller $y(0) = 1$.

- (b) Ekvationen

$$(2xy^2 - 3) + (2x^2y + 4)y' = 0, \quad y = y(x),$$

är exakt. Bestäm den lösning som uppfyller $y(1) = 1$. Lösningen får ges på implicit form.

(4 p)

2. Bestäm den lösning till systemet

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = 4x(t) + y(t) \end{cases}$$

som uppfyller $x(0) = 0, y(0) = 1$.

(4 p)

3. Ekvationen

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0, \quad x > 0$$

har två lösningar $y_1(x) = x$ och $y_2(x) = x^{-1}$. Använd metoden med variation av parametrar för hitta den allmänna lösningen till ekvationen

$$x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = 2x^2 e^{-x}.$$

(4 p)

4. Systemet

$$\begin{cases} x' = -2xy \\ y' = y - x + xy - y^3 \end{cases}$$

för $(x, y) = (x(t), y(t))$ har tre kritiska punkter och konstanta lösningar

$$(x(t), y(t)) = (0, 0), \quad (0, 1), \quad (0, -1).$$

Förklara vad det betyder att en kritisk punkt är (asymptotiskt) stabil respektive instabil. Använd metoden med linjärisering för att avgöra om dessa kritiska punkter är stabila eller instabila, i de fall det går.

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

5. Visa att ekvationen

$$2xy'' - y' + 2y = 0$$

för $y = y(x)$ har en reguljär singular punkt vid $x = 0$. Bestäm två linjärt oberoende serielösningar vid $x = 0$ till ekvationen. För detta ska du ange den rekursionsrelation som ger koefficienterna i dessa serielösningar, samt beräkna minst tre termer i vardera serie. För vilka x konvergerar dessa serier?

(4 p)

6. Denna uppgift gäller lösningar till den andra ordningens linjära homogena differentialekvationen

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0 \tag{1}$$

där $p(t), q(t)$ är kontinuerliga funktioner definierade på ett intervall I . Om $y_1(t), y_2(t)$ är lösningar till (1) så definieras deras Wronskian som funktionen

$$W[y_1, y_2](t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Formulera existens- och entydighetssatsen för lösningar till (1). Visa med hjälp av denna att alla lösningar till (1) ges av

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

för olika val av c_1, c_2 om och endast om $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$ för något $t_0 \in I$.

(b) Visa att om $y_1(t), y_2(t)$ är lösningar till (1) så är antingen $W[y_1, y_2](t) = 0$ för alla $t \in I$ eller $W[y_1, y_2](t) \neq 0$ för alla $t \in I$.

(4 p)