



Tentamen i kursen SF1674

Datum: 2023-06-07

Skrivtid: 08:00 – 13:00

Tillåtna hjälpmedel: linjal, papper, passare och penna

Examinator: Tomas Ekholm

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Betygsgränserna är

Betyg	A	B	C	D	E
Total poäng	28	25	22	19	16

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

1. Beräkna det största värdet som uttrycket $xy\sqrt{z}$ kan anta då x , y och z är positiva tal och $x + y + z = 1$.

2. Skärningen mellan ellipsoiden

$$2x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

och planet

$$x - y + 2z = 2$$

är en ellips i rummet. Bestäm en tangentvektor för denna ellips i punkten $(1, 1, 1)$.

3. Beräkna

$$\int_{\gamma} \left(\ln(x+y) + \frac{x}{x+y} \right) dx + \frac{x}{x+y} dy,$$

där γ är den del av ellipsen $x^2 + 4y^2 = 4$ som går från $(0, 1)$ till $(2, 0)$ i första kvadranten.

4. Givet en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion $u = u(x, y)$. Transformera uttrycket

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

genom att införa de nya variablerna

$$\begin{cases} s = -\ln x + \ln y \\ t = \ln x + \ln y. \end{cases}$$

5. Avgör om integralen

$$\iint_D \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy,$$

där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ är konvergent.

6. Beräkna volymen av det begränsade område som bildas mellan paraboloiden $z = 2x^2 + 5y^2$ och konen $z^2 = 2x^2 + 5y^2$.

7. Låt $F(x, y) = (x^2y + y^3 + x - 12y, 24x - y^2 - x^3 - 6xy^2)$. Maximera kurvintegralen

$$\int_{\gamma} F \cdot dr,$$

över alla enkla, slutna, kontinuerligt deriverbara kurvor γ som innehåller origo och genomlöps moturs. Bestäm kurvan γ och kurvintegralens maximala värde.

8. Låt Y vara en kompakt yta i $\mathbb{R}^3$ och låt $r: D \rightarrow Y$ och $x: E \rightarrow Y$ vara två bijektiva parameterframställningar av Y av klass C^1 . Definiera vad som menas med arean av Y och visa att definitionen är oberoende av parameterframställning.

Tänk igenom dina formuleringar. Kontrollera dina svar i den mån det går. Lycka till!