



KTH Teknikvetenskap

SF1672 (SF1604) Linjär Algebra
Lösningsförslag till tentamen 2019.04.18

DEL A

1. Låt $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara funktionen $Q(x, y) = x^2 + xy + y^2$.
- (a) Bestäm den associerade symmetriska matrisen A till Q . **(2 p)**
- (b) Är funktionsvärdet i origo ett maximum, ett minimum, eller varken eller? **(2 p)**

Lösning. a) Den associerade symmetriska matrisen är

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Detta då $Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

b) Vi har att $\det(\lambda - A) = (\lambda - 1)^2 - \frac{1}{4} = 0$ har lösningarna $\lambda_1 = 1 + \frac{1}{2}$ och $\lambda_2 = 1 - \frac{1}{2}$. Detta betyder att vi kan göra ett basbyte $P \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sådan att $Q(u, v) = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$. Då egenvärdena λ_1 och λ_2 båda är positiva kan inte $Q(u, v)$ bli negativt. Därmed är $Q(0, 0) = 0$ ett minimum för funktionen. □

2. Låt $T_A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ vara den linjära avbildningen som bestäms av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestäm en bas β för bildrummet V till T_A . (2 p)
- (b) Bestäm en bas för det ortogonala komplementet $V^\perp$. (2 p)
- (c) Vi har en inducerad avbildning $S: V \rightarrow V$ som skickar $\vec{x}$ i V till $T_A(\vec{x})$. Bestäm en matrisrepresentation för S med avseende på basen β . (4 p)
- (d) Avbildningen S har två nollskilda egenvärden. Är T_A diagonaliserbar? (2 p)

Lösning. a) Matrisens sista kolumn är dess första, och vi ser att summan av kolumn 2 och kolumn 3 ger första kolumn. Vidare är det klart att kolumn 2 och 3 ej är parallella. En bas för bildrummet är

$$\beta = \{\vec{u}, \vec{v}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

b) Ett ekvationssystem för det ortogonala komplementet till V är ekvationerna $x + y - z - w = 0$ och $x + 2y + 2z + 3w = 0$. Gauss-Jordan elimination ger den reducerade trappstegsmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

En bas för det ortogonala komplementet blir

$$\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

c) Vi räknar ut avbildningens verkan på basvektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$. Detta ger

$$A \cdot \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 6 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Sedan uttrycker vi dessa vektorer som linjär kombinationer i basen β . Vi har att

$$A \cdot \vec{u} = -\vec{u} + \vec{v}, \quad \text{och} \quad A \cdot \vec{v} = 6\vec{u} + 6\vec{v}.$$

Matrisrepresentationen blir därför

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

d) Ja. Egenrummet till T_A tillhörande egenvärdet $\lambda = 0$ har dimension två. Avbildningen S har två linjärt oberoende egenvektorer. Egenvektorer till S blir också egenvektorer till T_A , och egenvärden blir noll-skilda. Detta ger fyra linjärt oberoende egenvektorer, och därmed är T_A diagonaliserbar.

□

3. För varje punkt $P = [x \ y \ z]^T$ i $\mathbb{R}^3$ definierar vi vektorrummet V_P som det linjära höljet

$$\text{Span}\left(\begin{bmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

(a) Bestäm dimensionen till V_P för varje punkt P . (3 p)

(b) Låt P vara en punkt på enhetssfären $E = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Bestäm ett ekvations-system vars lösningsmängd är $\{P + \vec{v} \mid \vec{v} \in V_P\}$. (3 p)

Lösning. a) Det är klart att de tre sista vektorerna i listan är överflödiga. Vi har att

$$\begin{bmatrix} z & 0 & y \\ 0 & z & -x \\ -x & -y & 0 \end{bmatrix}$$

har determinant $z(z \cdot 0 - xy) + y(0 \cdot (-y) + xz) = 0$. Dimensionen till V_P är därmed inte 3, och följaktligen högst 2. Det är klart att dom två första vektorerna är linjärt oberoende om $z \neq 0$. Vi kollar nu situationen $z = 0$. Vi insätter $z = 0$ i matrisen ovan. Om deras linjära hölje inte har dimension 2, men mindre, då måste alla (2×2) -minorer bli noll. Med första och tredje kolumn har vi en noll-skild maximal minor, nämligen $x^2 = 0$, vilket medför att $x = 0$. Med andra och tredje kolumn har vi minoren $y^2 = 0$, vilket medför att $y = 0$. Nu har vi att $x = y = z = 0$. Detta betyder att V_P har dimension 2 för alla punkt $P \neq (0, 0, 0)$, och i origo har vi dimension noll.

b) Låt $P = (a, b, c)^T$. Det är klart att P är normal till V_P , och vi har att V_P har dimension 2. Det följer att $P + V_P$ är ett plan, och att en ekvation för planet är $ax + by + cz - d = 0$. Talet d får vi vid insättning av punkten P , vilket ger $d = 1$.

□

DEL B

4. Bestäm avståndet mellan linjerna

(4 p)

$$\ell_1 = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \\ -t \end{bmatrix} \mid \text{tal } t \right\} \quad \text{och} \quad \ell_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2+t \\ 2-2t \\ 3+t \end{bmatrix} \mid \text{tal } t \right\}.$$

Lösning. Vi har att

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Detta betyder att planet H_1 som ges av ekvationen $x + 2y + 3z = 0$ innehåller linjen ℓ_1 och linjen $\ell'_2 = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \end{bmatrix}$. Ett parallellt plan H_2 innehåller linjen ℓ_2 , och vi har av konstruktionen att avståndet mellan linjerna ℓ_1 och ℓ_2 är avståndet mellan planen H_1 och H_2 . En punkt på H_2 är $\vec{v} = (2, 2, 3)^T$. Projektionen av $\vec{v}$ ned på normallinjen $N = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ till H_1 blir

$$\text{proj}_N(\vec{v}) = \frac{2 + 4 + 9}{|(1, 2, 3)|^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Det sökta avståndet är $|\text{proj}_N(\vec{v})| = \frac{15}{\sqrt{1+4+9}}$.

□

5. Låt P och D vara (6×6) -matriser. Matrisen P är inverterbar. Matrisen $D = (d_{i,j})$ är diagonal, där de tre första diagonalelementen $d_{1,1} = d_{2,2} = d_{3,3} = 0$, medan $d_{4,4} = d_{5,5} = d_{6,6} = 2$. Slutligen har vi matrisen $A = PDP^{-1}$.
- (a) Matrisen A är standardmatrisen till en avbildning $T: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$. Bestäm bild och nollrum till avbildningen T . (2 p)
 - (b) Matrisen A är symmetrisk om och endast om dess bildrum och nollrum har en specifik relation. Vilken? (3 p)

Lösning. a). Låt β vara basen för $\mathbb{R}^6$ som bildas av kolumnerna i matrisen P . En matrisrepresentation för avbildningen T i basen β blir diagonalmatrisen D . Därmed har vi att nollrummet till T har en bas som består av de tre första vektorerna i β . Och bildrummet till T har en bas som ges av de tre sista vektorerna i β .

b) Matrisen A är symmetrisk om och endast om egenrummen är ortogonala, och det finns en bas av egenvektorer. Kolumnerna i P bildar en bas av egenvektorer. Det finns två egenrum, E_0 som är nollrummet till T , och E_2 som är bildrummet till T . Matrisen A är symmetrisk om och endast om $E_0 = (E_2)^\perp$. □

6. Låt P_1, P_2 och P_3 vara tre olika punkt i planet. Låt $f_{i,j} = 0$ vara en ekvation för linjen som går genom punkterna P_i och P_j ($1 \leq i < j \leq 3$). Antag att punkterna P_1, P_2 och P_3 ej ligger på en och samma linje.

(a) Bestäm lösningarna till den kvadratiska ekvationen $f_{1,2}f_{2,3} = 0$.

(2 p)

(b) Lös ekvationssystemet

(2 p)

$$\begin{cases} f_{1,2}f_{2,3} = 0 \\ f_{2,3}f_{1,3} = 0 \\ f_{1,2}f_{1,3} = 0. \end{cases}$$

Lösning. a) Unionen av linjerna L_{12} och L_{23} .

b) Unionen av P_1, P_2 och P_3 .

□

7. Låt W vara vektorrummet av polynom av grad ≤ 999 .

(a) Låt $S: W \rightarrow \mathbb{R}^5$ vara den linjära avbildning som skickar ett polynom $f(x)$ i W till

$$S(f(x)) = [f(-1) \quad f(0) \quad f(1) \quad f(1) \quad f(2)]^T.$$

Bestäm dimensionen till bildrummet.

(3 p)

(b) Antag att $T: W \rightarrow \mathbb{R}^5$ är en surjektiv linjär avbildning sådan att $T(fg) = T(f)T(g)$ ¹ för alla polynom f och g . Visa att det inte finns något polynom av grad fyra med i nollrummet till T .

(4 p)

Lösning. a) För varje polynom $f(x)$ vill vektorn $S(f(x))$ ha samma värde i tredje och fjärde komponent, och kan då omöjligen vara surjektiv. Om vi väljer en bas för W och standardbasen för $\mathbb{R}^5$ då vill matrisrepresentationen A vara en $5 \times (1000)$ -matris. Matrisen A vill ha identiska tredje och fjärde rad, vilket betyder att rangen till A är högst fyra.

Låt $\{1, x, x^2, \dots, x^{999}\}$ vara en bas för W , och låt A vara matrisrepresentationen till S med standardbas för co-domän. Vi behöver enbart visa att bilden av de fyra första basvektorerna är linjärt oberoende. Vi har redan sett att rad tre och rad fyra i A är identiska, så vi tar bort en av dessa. Detta ger oss fyra vektorer i $\mathbb{R}^4$,

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Det är nog att visa att matrisen ovan har noll-skild determinant. Då vill vektorerna vara linjärt oberoende, och det följer då att de fyra första kolumnerna i A är linjärt oberoende. Detta ger att bildrummet har åtminstone dimension fyra, och från ovan vet vi att dimensionen inte är fem. Utvecklar längs andra raden, och på den kvarstående (3×3) -matrisen adderar vi rad två till rad ett;

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Därmed har vi att determinant till matrisen A' är $(-1)(-2)(8-2) = 12$.

b) Antag att $p(x)$ är ett polynom av grad fyra, och sådan att $T(p(x)) = \vec{0}$. Vi påstår nu att bildrummet till S har dimension ≤ 4 . Vid polynomdivision kan vi skriva varje polynom $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$ där restpolynomet $r(x)$ är ett polynom av grad äka mindre än fyra. Då polynomet $f(x) = p(x)q(x) + r(x)$ har vi att $T(f(x)) = \vec{0} + T(r(x))$. Det följer att bildrummet spänns upp av avbildningen T sitt värde på polynom av grad äka mindre än fyra. En bas för vektorrummet av polynom av grad mindre än fyra är $\{1, x, x^2, x^3\}$, och därför vill vektorerna $T(1), T(x), T(x^2)$ och $T(x^3)$ spanna upp bildrummet. Detta är orimligt då avbildningen är surjektiv.

□

¹Produkten på $\mathbb{R}^5$ är sådan att $\vec{0} \cdot \vec{v} = \vec{0}$ för alla vektorer $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^5$.