

TENTAMEN I VEKTORANALYS

SI1146 och SI1140 Del 1, HT17

Torsdagen den 21:e december 2017

Anteckna på varje blad: Namn, utbildningslinje, årskurs och problemnummer.

Tillåtna hjälpmedel: Formelblad som delas ut. Miniräknare ej tillåten!

Examinator: Edwin Langmann (langmann@kth.se)

Ansvarig lärare: Per Moosavi (pmoosavi@kth.se)

Bonuspoängen från kursomgången HT17 adderas till första uppgiften, dock ger uppgiften max 6 poäng totalt.

Poäng: Varje uppgift kan ge 6 poäng. Betygsgränserna finns på kurshemsidan (kurs-PM).

Motivera utförligt! Otillräckliga motiveringar kan medföra poängavdrag.

Notation: (x, y, z) är kartesiska koordinater, och $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ är Ortsvektorn. (ρ, φ, z) är cylinderkoordinater definierade genom $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. (r, θ, φ) är sfäriska koordinater definierade genom $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

Uppgift 1: Betrakta vektorfältet $\mathbf{B} = (z^2 - y^2 - xy, x^2 - z^2 + xy, zy - zx)$.

- a) Visa att $\mathbf{B}$ har en vektorpotential och beräkna en vektorpotential $\mathbf{A}$ till $\mathbf{B}$ sådan att $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{A} = 0$. [2p]

- b) Låt

$$S: x^4 + y^4 + R^2 z^2 = R^4, \quad z > 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z > 0,$$

där $R > 0$ är en konstant. Beräkna $\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$. [4p]

Ledning: Använd Gauss eller Stokes sats. Observera att S ej är sluten.

Uppgift 2: Givet ett vektorfält $\mathbf{A}$ och ett skalärfält f , visa m.h.a. indexnotation att:

a) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \nabla^2 \mathbf{A}$, [3p]

b) $\nabla^2 f(r) = f''(r) + bf'(r)/r$, [3p]

där a och b är konstanter som ska bestämmas, $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x_i x_i}$ och $\nabla^2 \mathbf{A} = \partial_i \partial_i \mathbf{A}$.

Uppgift 3: Spänningstensorn P_{ij} i ett linjärt elastiskt isotropiskt material ges av

$$P_{ij} = \lambda \delta_{ij} E_{kk} + 2\mu E_{ij},$$

där

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

och $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ beskriver förskjutningen från jämviktsläget.

- a) Vilken ordning har följande tensorer: (i) $P_{ij} \epsilon_{jkl}$ och (ii) $P_{ij} P_{jk} \delta_{ki}$? [1p]

- b) Låt $\mathbf{u} = a(x/2, y/2, x + y)$ i ett kartesiskt koordinatsystem K , där a är en given konstant. Beräkna P_{ij} . [2p]
- c) Låt K' beteckna ett kartesiskt koordinatsystem (x', y', z') som erhålls från K genom en rotation med vinkeln $\theta = \pi/4$ kring den gemensamma $x = x'$ -axeln. Beräkna P'_{ij} för fallet $\lambda = -\mu$. [2p]
- d) Beräkna $P_{ij}\epsilon_{ijk}$ i både K och K' . [1p]

Uppgift 4:

- a) Skalfaktorerna för ett ortogonalt kroklinjigt koordinatsystem (u_1, u_2, u_3) ges av $h_i = |\partial \mathbf{r} / \partial u_i|$. Beskriv kortfattat med ord vad dessa motsvarar. Hur ändras en liten volym beskriven med allmänna ortogonala kroklinjiga koordinater? [1p]
- b) Visa från uttrycket för $\nabla \phi$ att $\mathbf{e}_i = h_i \nabla u_i$ (ingen summation). [1p]
- c) Betrakta det kroklinjiga koordinatsystemet (u, v, w) givet genom

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = xy, \\ w = z. \end{cases}$$

Beräkna skalfaktorerna h_u, h_v och h_w och enhetsvektorerna $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v$ och $\mathbf{e}_w$. Visa att (u, v, w) är ortogonalt. [4p]

Uppgift 5: Hastighetsfältet $\mathbf{v}$ för en vätska antas satisfiera Navier-Stokes-ekvationen

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla \Phi - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

och kontinuitetsekvationen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

där ρ är densitet, μ viskositet, p tryck och Φ en skalärpotential för s.k. "body forces".

- a) Antag att vätskan är inkompressibel, dvs. att ρ är konstant. Visa att $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. [1p]
- b) Antag att viskositeten är så liten att man kan sätta $\mu = 0$. Visa att det stationära tidsberoende flödet för en inkompressibel vätska satisfierar Bernoullis ekvation

$$\mathbf{v} \cdot \nabla (\rho |\mathbf{v}|^2 / 2 + p + \Phi) = 0.$$

Vad kan man säga om värdet på $\rho |\mathbf{v}|^2 / 2 + p + \Phi$ i vätskans flödesriktning $\mathbf{v}$? [5p]

Ledning: Följande identitet kan vara användbar

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla (|\mathbf{v}|^2 / 2) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}).$$

Uppgift 6: Betrakta temperaturfördelningen $T = T(\mathbf{r}, t)$ i tre rumsdimensioner. Låt energidensiteten vara $q(\mathbf{r}, t) = \rho c T$ och energiströmtätheten $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\lambda \nabla T$, där ρ , c och λ är givna konstanter.

- a) Genom att studera förändringen i den totala energin i en godtycklig volym V med randyta S , motivera följande identitet:

$$\int_V \frac{\partial q}{\partial t} dV = - \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1)$$

- b) Visa att (1) leder till värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \nabla^2 T = 0, \quad (2)$$

där a är en konstant som ska uttryckas i de givna konstanterna.

[3p]

Betrakta nu den **endimensionella** versionen av (2). Låt $T(x)$ vara den stationära temperaturfördelningen inuti en homogen vägg med tjocklek L vars vänstra kant i $x = 0$ har fix temperatur $T(0) = T_0$ och på den högra kanten i $x = L$ gäller att

c) $T(L) = T_1,$

d) $j(L) = \alpha[T(L) - T_1],$

där $j(x) = -\lambda T'(x)$ är x -komponenten av värmevärmeströmtätheten $\mathbf{j} = j(x)\mathbf{e}_x$, och λ , α , T_0 och T_1 är konstanter. Bestäm $T(x)$ och $j(x)$ för de två fallen c) och d). [3p]

Lycka till!

Formelblad Vektoranalys

Följande formler gäller i ett ortogonalt, kroklinjigt koordinatsystem med koordinaterna u_1, u_2, u_3 , basvektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ och skalfaktorerna h_1, h_2, h_3 :

- $d\mathbf{r} = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3$
- $\text{grad } \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \mathbf{e}_3$
- $\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$
- $\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$
- $\text{div grad } \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \right) \right]$

där A_1, A_2 och A_3 är de kroklinjiga komponenterna av vektorfältet $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3.$$

Specialfall

Cylinderkoordinater: $h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1.$

Sfäriska koordinater: $h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta.$

ϵ - δ -relationen (tensornotation)

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

Stokes sats (tensornotation)

$$\int_S \epsilon_{rst} \partial_t A_{jk...} dS_s = \oint_C A_{jk...} dx_r$$

Gauss sats (tensornotation)

$$\int_V \partial_i A_{jk...} dV = \oint_S A_{jk...} dS_i$$

Lösningsförslag

OBS: Jag skrev ihop lösningsförslagen hastigt. Jag är tacksam om ni påpekar eventuella felskrivningar via mejl till: pmoosavi@kth.se

Uppgift 1:

- a) Eftersom $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{A} = 0$ är $A = (A_x, A_y, 0)$, vilken måste satisfiera

$$\begin{pmatrix} z^2 - y^2 - xy \\ x^2 - z^2 + xy \\ z(y - x) \end{pmatrix} = \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\partial_z A_y \\ \partial_z A_x \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}.$$

Således är

$$A_x = x^2 z - \frac{z^3}{3} + zxy + c_1(x, y), \quad A_y = y^2 z - \frac{z^3}{3} + zxy + c_2(x, y),$$

för vilka

$$\partial_x A_y - \partial_y A_x = zy - zx + \partial_x c_2 - \partial_y c_1$$

där $c_1 = c_1(x, y)$ och $c_2 = c_2(x, y)$ är godtyckliga funktioner. För enkelhets skull kan vi välja $c_1 = c_2 = 0$, vilket innebär att en vektorpotential är

$$\mathbf{A} = (x^2 z - \frac{z^3}{3} + zxy, y^2 z - \frac{z^3}{3} + zxy, 0),$$

vilken uppfyller $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

- b) Låt $S' : x^4 + y^4 \leq R^4$ vara en yta i xy -planet med normalriktning $\mathbf{e}_z$. Vi visar att

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

på två sätt:

- (i) Gauss sats: $S - S'$ omsluter en volym V med normal utåt överallt. Således är

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_{S-S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \{\text{Gauss sats}\} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0$$

eftersom $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$.

- (ii) Stokes sats: S och S' har samma rand C (positivt orienterad i båda fallen). Således är

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \{\text{Stokes sats för } S\} \\ &= \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \{\text{Stokes sats för } S'\} = \iint_{S'} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

eftersom $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Alltså,

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{x^4+y^4 \leq R^4} \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z dx dy = \boxed{0}$$

eftersom $\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z = 0$ för $z = 0$.

Uppgift 2:

a)

$$[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} \partial_l A_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j \partial_l A_m \\ = \partial_i \partial_j A_j - \partial_j \partial_j A_i = [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}]_i.$$

b) Eftersom $\partial_i r = x_i r^{-1}$ and $\partial_i \partial_i r = \partial_i (x_i r^{-1}) = \delta_{ii} r^{-1} - x_i r^{-2} \partial_i r = 3r^{-1} - x_i x_i r^{-3} = 2r^{-1}$ får vi

$$\nabla^2 f(r) = \partial_i \partial_i f(r) = \partial_i f'(r) \partial_i r = f''(r) (\partial_i r) (\partial_i r) + f'(r) \partial_i \partial_i r \\ = f''(r) x_i x_i r^{-2} + 2f'(r) r^{-1} = f''(r) + 2f'(r) r^{-1}.$$

Uppgift 3:

a) (i) ordning 3 och (ii) ordning 0

b) Vi har

$$(E_{ij}) = a \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

och $E_{kk} = a/2 + a/2 = a$. Således är

$$(P_{ij}) = \lambda a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \lambda + \mu & 0 & \mu \\ 0 & \lambda + \mu & \mu \\ \mu & \mu & \lambda \end{pmatrix}.$$

c) Rotationen kring x -axeln ges av transformationskoefficienterna

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Således, för $\lambda = -\mu$

$$(P'_{ij}) = a\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ = a\mu \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta & \cos \theta \\ \sin \theta & 2 \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \\ = \frac{a\mu}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

d) Eftersom P_{ij} och P'_{ij} är symmetriska i indexen i och j medan ϵ_{ijk} är antisymmetrisk är $P_{ij} \epsilon_{ijk} = 0 = P'_{ij} \epsilon_{ijk}$.

Uppgift 4:

- a) Skalfaktorn h_i ger förändringen i avstånd under en liten förändring du_i i koordinaten u_i , dvs. avståndsförändringen är $h_i du_i$ (ingen summering). En volym ändras som $dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$.

- b) Vi har

$$\nabla \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \mathbf{e}_3.$$

Eftersom (u_1, u_2, u_3) är oberoende får vi om vi väljer $\phi = u_1$ att

$$\nabla u_1 = \frac{1}{h_1} \mathbf{e}_1$$

och motsvarande genom att välja $\phi = u_2$ resp. $\phi = u_3$.

- c) Vi har

$$\begin{cases} \mathbf{e}_u/h_u = \nabla u = 2(x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y), \\ \mathbf{e}_v/h_v = \nabla v = y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_w/h_w = \nabla w = \mathbf{e}_z, \end{cases}$$

vilket innebär att

$$\begin{cases} h_u = 1/(2\sqrt{x^2 + y^2}), \\ h_v = 1/\sqrt{x^2 + y^2}, \\ h_w = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{e}_u = (x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y)/\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \mathbf{e}_v = (y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y)/\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \mathbf{e}_w = \mathbf{e}_z, \end{cases}$$

från vilket det följer att $\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_v = \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_w = \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_w = 0$.

Uppgift 5:

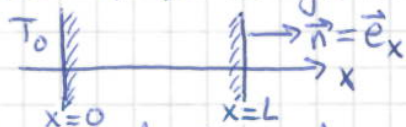
- a) Kontinuitetsekvationen för ρ konstant ger direkt att $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.
- b) Se s. 147-149 i Matthews bok.

Uppgift 6:

- a)-b) Se s. 132-133 i Matthews bok.
- c)-d) Se inskannat exempel på nästa sida.

Exempel: Bestäm den stationära temperaturfördelningen $T(x)$ i en homogen vägg vars vänstra kant i $x=0$ har fix temperatur $T(0)=T_0$ och där på den högra kanten i $x=L$ gäller att

a) $T(L)=T_1$,



b) Newtons avkylningslag gäller med yttre temperaturen T_1 .

Lösning:

Eftersom problemet kan antas vara endimensionellt och väggen är homogen samt ingen värme produceras (rimligtvis) blir den tidsoberoende värmeledningsekvationen

$$T''(x) = 0 \quad \text{för } 0 < x < L.$$

Integrerar två ggr

$$\Rightarrow T(x) = C_1 x + C_2, \quad \vec{j} = -\lambda T'(x) \vec{e}_x = -\lambda C_1 \vec{e}_x,$$

där C_1 och C_2 är integrationskonstanter som bestäms från våra randvillkor.

$$a) \begin{cases} T(0) = T_0 \\ T(L) = T_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = T_0 \\ LC_1 + C_2 = T_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{T_1 - T_0}{L} \\ C_2 = T_0 \end{cases}$$

Svar: $T(x) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{L} x, \quad \vec{j}(x) = -\lambda \frac{T_1 - T_0}{L} \vec{e}_x.$

Konstant ström.
Mindre λ eller
större L (tjockare
vägg) ger bättre
Isolering

$$b) \begin{cases} T(0) = T_0 \\ \vec{j}(x) \cdot \vec{n}|_{x=L} = -\lambda T'(L) = \alpha (T(L) - T_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = T_0 \\ -\lambda C_1 = \alpha (LC_1 + C_2 - T_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{\alpha (T_1 - T_0)}{\lambda + L\alpha} = \frac{T_1 - T_0}{L + \lambda/\alpha} \\ C_2 = T_0 \end{cases}$$

Svar: $T(x) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{L + \lambda/\alpha} x, \quad \vec{j}(x) = -\lambda \frac{T_1 - T_0}{L + \lambda/\alpha} \vec{e}_x.$

Konstant ström.
Gränsfall:
• $\alpha \rightarrow \infty$ ger a),
• $\alpha \rightarrow 0^+$ ger
perfekt isolering