

Lösningar till Tentamen i Modern Fysik (SH1014)

14.00-19.00, 2020-04-17, KTH, Stockholm

Denna examen genomfördes per distans, med videomjukvaran Zoom

Zoom-ansvarig lärare: Pär Olsson (073-7650538)

Examinator: Torbjörn Bäck (073-7650590)

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare.

Formelsamling (uppdaterad för denna tentamen) och **Periodiska systemet** var inkluderad i filen med tentamenslydelsen.

Notera att *Matematics Handbook Beta* **inte** var tillåten vid denna tentamen.

Tentamen består av 8 problem som vardera ger maximalt 5 poäng. För godkänt krävs 20 poäng. Betyget baseras på uppnådd poäng. Betygskriterierna är följande:

A:36-40, B:32-35.5, C:28-31.5, D:24-27.5, E:20-23.5, Fx:18-19.5, F:0-17.5

1. Problem:

Betrakta tillstånden $n = 2, l = 0$ och $n = 2, l = 1$ i väteatomen. För vart och ett av dessa tillstånd, beräkna sannolikheten för att elektronen befinner sig innanför Bohr-radien, a_0 . [5 p]

Till hjälp i beräkningarna får ni följande lösta integral:

$$\int x^n e^{-cx} = -\frac{e^{-cx}}{c} \left(x^n + \frac{nx^{n-1}}{c} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{c^2} + \dots + \frac{n!}{c^n} \right)$$

Lösning:

Vi har sannolikheten att finna en partikel innanför radien a_0 som:

$$P_{a_0}^{n,l} = \int_0^{a_0} r^2 |R_{nl}(r)|^2 dr$$

För tillstånden i) $(n, l) = (2, 0)$ och ii) $(n, l) = (2, 1)$ får vi då:

$$\text{i) } P_{a_0}^{2,0} = \int_0^{a_0} r^2 \frac{4}{(2a_0)^3} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right)^2 e^{-r/a_0} dr = \left[\frac{-e^{-r/a_0}}{8a_0^4} (8a_0^4 + 8a_0^3 r + 4a_0^2 r^2 + r^4) \right]_0^{a_0} = 0.0343 = 3.43\%$$

$$\text{ii) } P_{a_0}^{2,1} = \int_0^{a_0} r^2 \frac{1}{(2a_0)^3} \frac{r^2}{3a_0^2} e^{-r/a_0} dr = \left[\frac{e^{-r/a_0}}{24a_0^4} (-24a_0^4 + 24a_0^3 r + 12a_0^2 r^2 + 4a_0 r^3 + r^4) \right]_0^{a_0} =$$

$$0.00366 = 0.37\%$$

Om man betraktar hur dessa vågfunktioner ser ut inser man att de små sannolikheterna är högst rimliga.

2. Problem:

a) Härled Lorentztransformationen för hastigheter i x-led. Ange på formen $u_x = \frac{dx}{dt} = f(u'_x)$, där u_x och u'_x är hastigheten hos en kropp relativt S och S' -systemen. Redovisa noggrannt alla steg. [3 p]

b) En radioaktiv kärna som färdas med hastigheten $0.1 c$ i x-led skickar ut en elektron rakt bakåt med hastigheten $0.8 c$ relativt kärnan. Vilken hastighet har elektronen i labbsystemet? [1 p]

c) En kort tid senare så skickar atomkärnan ut en gammafoton rakt framåt. Fotonens hastighet är förstås c relativt kärnan den sänds ut från. Visa att dess hastighet är c även i labbsystemet. [1 p]

Lösning:

a) Se härledning i *Sammanfattning 3*.

b) Kärnan färdas med hastigheten $v = 0.1 c$ och skickar ut en elektron med hastigheten $u'_x = -0.8 c$. Använd hastighetsaddition där $u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} = \frac{(-0.8 + 0.1)c}{1 + \frac{0.1c}{c^2}(-0.8c)} = -0.76 c$

c) Om vi sätter $u'_x = c$ för en foton och använder hastighetsaddition får vi

$$u_x = \frac{c+v}{1+\frac{v}{c^2}c} = \frac{c(1+v/c)}{1+v/c} = c$$

alldeles oavsett vad v är.

3. Problem:

En partikel med massa m påverkas av en endimensionell halv-öändlig lådpotential som bestäms av

$$U(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < L \\ U_0 & x \geq L \end{cases}$$

Bestäm partikelns vågfunktion $\Psi(x)$ fullständigt. [5 p]
(under villkoret att $E < U_0$ – tillades under tentamen)

Lösning:

Vi har tre regioner I, II, III , som bestäms av värdet på potentialen, i samma ordning som i ekvationen ovan. Vi kan skriva vågfunktionen som $\Psi = \Psi_I + \Psi_{II} + \Psi_{III}$.

I region I måste $\Psi_I(x) = 0$ eftersom energin annars blir öändlig.

I region II kan vi med sedvanliga argument ansätta att vågfunktionen kan skrivas som

$$\Psi_{II}(x) = A \sin kx + B \cos kx, \text{ där } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

Eftersom Ψ måste vara kontinuerlig har vi randvillkoret $\Psi_{II}(0) = \Psi_I(0) = 0 = A \sin 0 + B \cos 0$, vilket alltså leder till att $B = 0$ och att vi då har för region II att

$$\Psi_{II}(x) = A \sin kx$$

I region III ser vi, då $E < U_0$ att vi kan ansätta en lösning

$$\Psi_{III}(x) = C e^{\alpha x} + D e^{-\alpha x}, \text{ där } \alpha = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

För att vågfunktionen ska vara normerbar måste $C = 0$, och för att $\Psi_{II}(L) = \Psi_{III}(L)$, så har vi att

$$A \sin kL = D e^{-\alpha L}$$

(Det är i princip inte nödvändigt för uppgiften, men vi kan nu utnyttja deriverbarheten för att närma oss kvantisering villkoret för energin då $\Psi'_{II}(L) = \Psi'_{III}(L)$ ger oss att $kA \cos kL = -\alpha D e^{-\alpha L}$. Om vi dividerar relationerna mellan A och D får vi fram

$$\frac{k}{\alpha} = -\tan kL, \text{ eller } \sqrt{\frac{E}{U_0 - E}} = -\tan \frac{L}{\hbar} \sqrt{2mE}$$

Detta är en transcendent ekvation utan analytisk lösning, men man kan numeriskt eller grafiskt lösa den för att se vilka kvantiserade energier E , och därmed k och α , som är tillåtna, givet U_0 och L .)

För att bestämma vågfunktionen fullständigt behöver vi ytterligare en relation mellan A och D och det kan vi få fram genom att normera vågfunktionen:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = \int_0^L A^2 \sin^2 kx dx + \int_L^{\infty} D^2 e^{-2\alpha x} dx = \frac{A^2}{2} \left(L - \frac{\sin 2kL}{2k} \right) - \frac{D^2}{2\alpha} e^{-2\alpha L}$$

Nu kan vi lösa ut A och D som:

$$A = \sqrt{\frac{2}{L - \frac{\sin 2kL}{2k} - \frac{\sin^2 kL}{\alpha}}}$$

$$D = \frac{\sqrt{2} e^{\alpha L} \sin kL}{\sqrt{L - \frac{\sin 2kL}{2k} - \frac{\sin^2 kL}{\alpha}}}$$

och den kompletta vågfunktionen blir med dessa konstanter:

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ A \sin kx & 0 \leq x < L \\ D e^{-\alpha x} & x \geq L \end{cases}$$

4. Problem:

Molekylen NaCl bildas genom att Na ger ifrån sig sin valenselektron till Cl så att Na^+ binder med Cl^- . Det kostar 5.1 eV att frigöra en elektron från en fri Na-atom. Man vinner 3.8 eV på att binda in en extra elektron i en fri Cl-atom.

- a) Rita upp potentialen, $U(r)$, som en funktion av avståndet, r , mellan jonernas två atomkärnor. [1 p]
b) Anta nu förenklat att laddningsfördelningarna runt dessa två joner är sfäriskt symmetriska och inte börjar överlappa förrän jämviktsläget uppnås när man för dem närmare varandra. Uppskatta hur djupt minimum molekylen potential, U , har vid jämviktsavståndet 0.24 nm. [4 p]

Lösning:

- a) Se figuren i *Sammanfattning 9* i kursen.

- b) Då vi antar att laddningsfördelningarna inte överlappar kan vi reducera ner dem till punktladdningar som växelverkar enligt Coulombs lag. Na-jonen har laddningen $q_1 = +e$ och Cl-jonen har laddningen $q_2 = -e$. Den potentiella energin mellan dem blir därför vid jämviktstillståndet

$$V_C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = 9.62 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 6 \text{ eV}$$

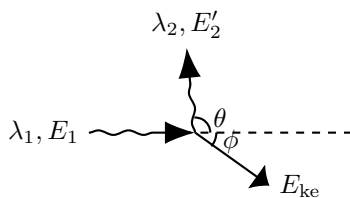
Eftersom potentialen inte går till $V = 0$ vid stora r , så länge vi betraktar laddade joner, utan upp till aktiveringsenergin på 1.3 eV (här, en liten typo smet sig in i värdet 3.8 eV - egentligen ska det vara 3.6 eV). Därför blir djupeet på potentialgropen $V_{\text{bind}} = V_C - 1.3 \text{ eV} = 4.7 \text{ eV}$.

5. Problem:

Högenergetisk Röntgenstrålning kan som bekant växelverka med Comptonspridning. Vid en sådan spridningshändelse så har vi en inkommande Röntgenfoton med okänd våglängd λ_1 , en spridd foton med energin $E'_2 = 120 \text{ keV}$, och en spridd elektron med den kinetiska energin $E_{\text{ke}} = 40 \text{ keV}$. Vi kan anta att elektronen är i vila före händelsen.

- a) Bestäm våglängden λ_1 på den inkommande Röntgenstrålningen i enheten [nm]. [1 p]
b) Bestäm spridningsvinkeln, θ , för den spridda fotonen. [1 p]
c) Bestäm spridningsvinkeln, ϕ , för den spridda elektronen. [3 p]

Lösning:



- a)
Den totala energin bevaras. Energin före spridningen är $E_1 + m_e c^2$, där m_e är elektronens vilomassa. Energin efter spridningen är $E'_2 + m_e c^2 + E_{\text{ke}}$. Vi har således $E_1 = E'_2 + E_{\text{ke}} = 120 + 40 = 160 \text{ keV}$. Det ger $\lambda_1 = hc/E_1 = \dots = 0.0077491 \text{ nm}$. Vi ser alltså att våglängden för den inkommande fotonen är ca 0.0077 nm.

- b)
För att bestämma vinkeln θ så använder vi oss av formeln för Comptonspridning från formelsam-

lingen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{E'_2} - \frac{1}{E_1} &= \frac{1 - \cos \theta}{m_e c^2} \\ \frac{1}{120 \text{ keV}} - \frac{1}{160 \text{ keV}} &= \frac{1 - \cos \theta}{511 \text{ keV}} \\ \cos \theta &= 1 - \frac{511}{120} + \frac{511}{160} = -0.064583 \\ \theta &= \arccos(-0.064583) = 93.7^\circ.\end{aligned}$$

Vi se att fotonen sprids i vinkeln 93.7° .

c)

Flera metoder är möjliga för att bestämma vinkeln ϕ . Man kan t.ex. ställa upp rörelsemängdens bevarande i både x - och y -led, och eliminera p_x . I lösningen som visas här så använder vi endast rörelsemängdens bevarande i y -led i diagrammet ovan. Vi betecknar här elektronens rörelsemängd som p och dess y -komponent som p_y . Vi betecknar den spridda fotonens rörelsemängd som p_γ och dess y -komponent som $p_{\gamma,y}$. Vi betecknar elektronens totala energi som E och noterar att vi har $E = m_e c^2 + E_{\text{ke}} = 511 + 40 = 551 \text{ keV}$. Nu har vi:

$$\begin{aligned}E^2 &= p^2 c^2 + m_e^2 c^4 \\ p^2 &= \frac{E^2 - m_e^2 c^4}{c^2} \\ p &= \frac{\sqrt{E^2 - m_e^2 c^4}}{c} = \dots = 206.11 \text{ keV}/c.\end{aligned}$$

För y -komponenterna så har vi: $p_y = -p \sin \phi$ och $p_{\gamma,y} = p_\gamma \sin \theta$. Bevarande i y -led ger:

$$\begin{aligned}p_y + p_\gamma &= 0 \\ p \sin \phi &= p_\gamma \sin \theta = \frac{E_\gamma}{c} \sin \theta \\ \sin \phi &= \frac{E_\gamma \sin \theta}{pc} = \frac{120 \sin \theta}{206.11} = 35.52^\circ.\end{aligned}$$

Elektronen sprids alltså i vinkeln 35.5° .

6. Problem:

Rymdskeppet *Enterprise* är satt i karantän pga en mystisk sjukdom som spritt sig ombord. Inga nya planeter eller civilisationer får upptäckas för tillfället.

Mr Spock fortsätter därför med sina vetenskapliga experiment. Han har nu byggt om sin elektron-accelerator från i julas till en... wait for it... positroniumaccelerator! ¹

Maskinen kan skapa *positronium*, alltså det kortlivade systemet där en elektron och en positron (elektronens antipartikel) är bundna till varandra. Positroniumet kan sedan accelereras till valfri kinetisk energi mellan 0 och 10 MeV. Spock är speciellt intresserad av att se vad som händer då positronium med olika energier E_{kin} annihileras och skickar ut annihilationsfotoner.

Spock vet att positronium i vila normalt annihileras med emission av två motriktade fotoner med samma energi, för att bevara rörelsemängden. Men han funderar på om det kanske är möjligt att bara *en* foton skickas ut vid annihilationen om man väljer exakt rätt värde på E_{kin} så att både energi och rörelsemängd bevaras.

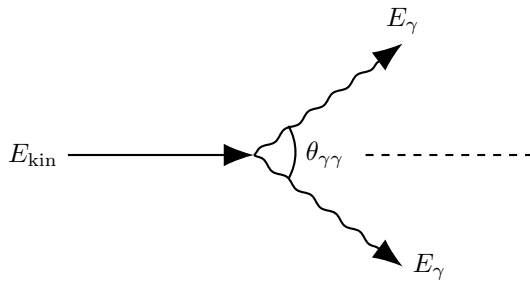
a) Är det möjligt att välja ett värde på E_{kin} i intervallet 0-10 MeV så att endast en foton skickas ut vid annihilationen? Om inte, motivera. Om det är möjligt, beräkna denna kinetiska energi, samt energin (för lämpligt vald riktning) på fotonen i labsystemet. [2 p]

¹En kommentar från Torbjörn som gjort detta tal: Pär tycker att det är orealistiskt med en positroniumaccelerator, eftersom positronium som system betraktat är oladdat, men Mr Spock har lyckat med detta och Pär får säga vad han vill om det :-)

Spock ställer nu in acceleratoren på $E_{\text{kin}} = 1022 \text{ keV}$ (dvs $2m_e c^2$) och utför ett experiment där han studerar energin och vinkeln på de emitterade fotonerna. Antag att positronium sönderfaller med två fotoner i sitt vilosystem och att de två fotonerna skickas ut symmetriskt i förhållande till positroniumets hastighetsvektor i labsystemet. I labsystemet så blir då vinkeln mellan de två fotonernas riktning, $\theta_{\gamma\gamma}$, dubbelt så stor som vinkeln mellan riktningen för en av fotonerna och positroniums hastighetsvektor, $\theta_{x,\gamma}$

b) Beräkna, i labsystemet, vinkeln $\theta_{\gamma\gamma}$ i grader och energin, E_γ i keV, på en av fotonerna [3 p]

Lösning:



a) Antalet fotoner som emitteras kan inte bero på vilket inertialsystem som vi väljer. Vi flyttar oss till mass-centrum-systemet för positronium. Där måste både p och E bevaras. Eftersom $p = 0$ före annihilationen så måste minst två fotoner skickas ut för att bevara rörelsemängden. Vi inser således att det är *omöjligt* att bara en foton emitteras, oavsett valet av system.

b) Vi börjar med att beräkna energin, E_γ för en av fotonerna. Totala energin, E , måste bevaras:

$$\begin{aligned} E_{\text{fore}} &= 2m_e c^2 + E_{\text{kin}} = 2m_e c^2 + 2m_e c^2 = 4m_e c^2 \\ E_{\text{efter}} &= 2E_\gamma \\ 4m_e c^2 &= 2E_\gamma \\ E_\gamma &= 2m_e c^2 = 1022 \text{ keV}. \end{aligned}$$

Vi använder nu formeln: $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$ för att beräkna rörelsemängden i x -riktningen före annihilationen ($p = p_x$). Från ovanstående så vet vi att $E = 4m_e c^2$. Vi noterar också att vilomassan, m_0 , för positronium är lika med två elektronmassor, alltså $m_0 = 2m_e$. Nu får vi:

$$p_x = \frac{\sqrt{E^2 - (2m_e)^2 c^4}}{c} = \frac{\sqrt{16m_e^2 c^4 - 4m_e^2 c^4}}{c} = \frac{\sqrt{12}m_e c^2}{c} = \sqrt{12}m_e c.$$

Eftersom p_x måste bevaras efter annihilationen så har vi:

$$\begin{aligned} \sqrt{12}m_e c &= 2 \frac{E_\gamma}{c} \cos\left(\frac{\theta_{\gamma\gamma}}{2}\right) \\ \frac{\theta_{\gamma\gamma}}{2} &= \arccos\left(\frac{\sqrt{12}}{4}\right) = 30^\circ \\ \theta_{\gamma\gamma} &= 60^\circ. \end{aligned}$$

Vi ser att vinkeln, $\theta_{\gamma\gamma}$, mellan de två fotonerna i labsystemet, blir 60° .

7. Problem:

En av de som först började undersöka kosmologiska tidsskalor med hjälp av radioaktiva sönderfall var Ernest Rutherford (mer känd som atomkärnans upptäckare). Kort efter att den relativa förekomsten av de naturliga uranisotoperna U-235 och U-238 uppmättes på 1920-talet (0.72% U235 och

99.28% U238) så föreslog Rutherford att de olika uranisotoperna antagligen ursprungligen skapades i ungefär samma relativa mängd men att sönderfallen (pga den mycket kortare halveringstiden ($7.04 \cdot 10^8$ år) hos U-235 i förhållande till halveringstiden ($4.468 \cdot 10^9$ år) för U-238) gjort U-238 dominerande idag.

Låt oss, i Rutherfords anda, göra ett förenklat antagande, nämligen att uranet som vi hittar på Jorden idag skapades i en enda supernovaexplosion vid en viss tidpunkt. Enligt en viss modern modell för supernovor så blir produktionsförhållandet U235/U238 vid en sådan supernovaexplosion ungefär 1.65.

Beräkna hur långt tid som har gått sedan supernovaexplosionen. [5 p]

Lösning:

Vi har idag, dvs vid tiden $t = t_{\text{nu}}$, förhållandet $N_{\text{U235}}/N_{\text{U238}} = 0.72/99.28$. Enligt supernovamodellen ovan så har vi, vid tiden $t = 0$, $N(0)_{\text{U235}}/N(0)_{\text{U238}} = 1.65$.

Generellt så har vi för sönderfall:

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} = N(0)e^{-t \ln 2 / t_{1/2}}$$

Vi kan nu skriva:

$$\begin{aligned} \frac{N(t_{\text{nu}})_{\text{U235}}}{N(t_{\text{nu}})_{\text{U238}}} &= \frac{0.72}{99.28} = \frac{N(t_{\text{nu}})_{\text{U235}}e^{-t \ln 2 / t_{1/2, \text{U235}}}}{N(t_{\text{nu}})_{\text{U238}}e^{-t \ln 2 / t_{1/2, \text{U238}}}} = 1.65e^{-t_{\text{nu}} \ln 2 \left(\frac{1}{t_{1/2, \text{U235}}} - \frac{1}{t_{1/2, \text{U238}}} \right)} \\ t_{\text{nu}} &= \frac{\ln \left(\frac{0.72}{99.28 \cdot 1.65} \right)}{-\ln 2 \left(\frac{1}{t_{1/2, \text{U235}}} - \frac{1}{t_{1/2, \text{U238}}} \right)} = \dots = 6.54 \cdot 10^9 \text{ y.} \end{aligned}$$

Vi ser att tiden sedan uranet skapades i supernovan är $6.54 \cdot 10^9$ år.

8. Problem:

Den radioaktiva nukliden ^{230}Th har en halveringstid på 75400 år och sönderfaller som regel med alfasönderfall. Men det finns också en liten sannolikhet att sönderfallet istället sker med s.k. *klustersönderfall*. Detta exotiska sönderfall fungerar likadant som alfa-sönderfallet, men istället för en alfapartikel så skickas en tyngre atomkärna ut från moderkärnan. I fallet med ^{230}Th så är det kärnan ^{24}Ne som emitteras.

a) Vilken är dotterkärnan? [1 p]

b) Beräkna klustersönderfallets Q -värde i enheten [MeV]. [2 p]

c) Beräkna den kinetiska energin i [MeV] för både dotterkärnan och ^{24}Ne efter sönderfallet. [2 p]

Lösning:

a)

Vi har:

$$A(^{230}\text{Th}) = 230$$

$$Z(^{230}\text{Th}) = 90$$

$$N(^{230}\text{Th}) = 230 - 90 = 140$$

$$A(^{24}\text{Ne}) = 24$$

$$Z(^{24}\text{Ne}) = 10$$

$$N(^{24}\text{Ne}) = 24 - 10 = 14$$

Dotterkärnan har således:

$$A = 230 - 24 = 206$$

$$Z = 90 - 10 = 80, \text{ dvs grundämnet är Hg.}$$

Dotterkärnan är således: ^{206}Hg .

b)

Vi använder skillnaden i massa, före och efter sönderfallet, för att beräkna Q -värdet. Vi noterar att antalet elektroner i atomen före är samma som det totala antalet elektroner i de två atomerna efter sönderfallet. Därför så blir skillnaden i atom-massa samma som skillnaden i kärnmassa (förutsatt att vi försummar effekten av skillnader i elektronernas totala bindningsenergi, och det gör vi, eftersom den är liten). Vi använder således atommassor från tabellen med nukliderna Th-230, Hg-206, och Ne-24:

$$Q = \Delta Mc^2 = (M(\text{Th230}) - (M(\text{Hg206}) + M(\text{Ne24}))) c^2 = \dots = 57.8 \text{ MeV}.$$

Vi ser att Q -värdet för sönderfallet blir 57.8 MeV.

c)

Energien motsvarande Q -värdet kommer att fördelas som kinetisk energi på de två kärnorna efter sönderfallet (vi antar här att ingen av dem bildas i ett exciterat tillstånd). Vi noterar först att Q -värdet är litet i jämförelse med viloenenergin, mc^2 för partiklarna (viloenenergin är ju i storleksordningen A GeV, eftersom proton- och neutronviloenenergin är ungefär 1 GeV). Detta innebär att vi kan räkna klassiskt.

Bevarande av energi och rörelsemängd ger, efter lite räknande i sista ledet:

$$\begin{aligned} Q &= E_{k1} + E_{k2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \\ m_1 v_1 &= m_2 v_2 \\ E_{k1} &= \dots = \frac{Q}{1 + \frac{m_1}{m_2}} = 51.7 \text{ MeV}, \end{aligned}$$

där E_{k1} är den kinetiska energin för Ne-24. Vi har därmed $E_{k2} = Q - E_{k1} = 6.1 \text{ MeV}$, för dotterkärnan Hg-206.

Några formler och konstanter

version 2.4

Modern Fysik SH1014, HT2020, KTH, Tentamen 2020-04-17

Naturkonstanter

Ljusets hastighet i vakuum	c	$2.99792458 \cdot 10^8$ m/s
Elektronens laddning	e	$1.6021766 \cdot 10^{-19}$ C
Dielektricitetskonst. i vakuum	ϵ_0	$8.854 \cdot 10^{-12}$ F/m
Permeabiliteten i vakuum	μ_0	$4\pi 10^{-7}$ N/A ²
Plancks konstant	h	$6.62618 \cdot 10^{-34}$ J·s = $=4.13570 \cdot 10^{-15}$ eV·s
Boltzmanns konstant	k_B	$1.38065 \cdot 10^{-23}$ J/K
Avogadros tal	N_A	$6.022045 \cdot 10^{23}$ mol ⁻¹
$1/4\pi\epsilon_0$		$8.98755 \cdot 10^9$ Nm ² /C ²

Vilomassor

partiklar:

	u [atomär massenhet]	MeV/c ²
Elektron	$5.485803 \cdot 10^{-4}$	0.511003
Proton	1.00727647	938.280
Neutron	1.00866501	939.573
Deutron	2.01355321	1875.628
Alfapartikel	4.00150618	3727.409

atomer:

	u [atomär massenhet]
¹ H	1.007825
² H	2.014101
⁴ He	4.002603
²⁴ Ne	23.993610
²⁰⁶ Hg	205.977514
²⁰⁶ Pb	205.974465
²⁰⁶ Po	205.980481
²⁰⁸ Hg	207.985940
²⁰⁸ Pb	207.976652
²⁰⁸ Po	207.981245
²³⁰ Th	230.033133

Omvandlingsfaktorer och enheter

1 eV = $1.602189 \cdot 10^{-19}$ J
1 b [barn] = 10^{-28} m²
1 u = 931.502 MeV/c² = $1.660566 \cdot 10^{-27}$ kg
1 Bq = 1 sönderfall/s
1 Ci = $3.7 \cdot 10^{10}$ Bq
1 Å [Ångström] = $1 \cdot 10^{-10}$ m
1 fm [fermi] = $1 \cdot 10^{-15}$ m

Speciell Relativitetsteori

Lorentztransformationen

Två inertialsystem, S och S' . Vid $t = 0$ och $t' = 0$ befinner sig O och O' i samma punkt. S' rör sig med hastigheten v längst x -axeln relativt S . Lorentztransformationen:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.\end{aligned}$$

Den inversa Lorentztransformationen:

$$\begin{aligned}x &= \gamma(x' + vt') \\y &= y' \\z &= z' \\t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right).\end{aligned}$$

Dopplereffekten

Observerad frekvens f på ljuset då det utsänds från en ljuskälla som i sitt system har ljusfrekvensen f_0 då ljuskällan färdas med hastigheten v i vinkeln θ mot observatören. $\theta = 0$ motsvarar att källan rör sig *rakt ifrån* observatören.

$$f = \frac{f_0}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta\right)}.$$

Hastighetstransformationer

Transformation av hastigheter mellan S' och S :

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \\u_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)} \\u_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)}\end{aligned}$$

Samband mellan rörelsemängd och energi

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

Vågor och Partiklar

Plancks strålningslag

$$I(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \left[\frac{W}{m^2} \frac{1}{Hz} \frac{1}{sr} \right]$$

Comptonspridning

Då en inkommande foton med våglängden λ sprids (i vinkeln θ) mot en stillastående elektron så gäller:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta).$$

där λ' är våglängden för den spridda fotonen. För fotonenergierna gäller på motsvarande sätt:

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1 - \cos\theta}{m_e c^2}.$$

Kvantmekanik

Den tidsberoende en-dimensionella Schrödingerekvationen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

Normaliseringsvillkor i en dimension:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1.$$

Oändlig en-dim. lådpotential, lösning

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \left[\hbar = \frac{h}{2\pi} \right] = \frac{n^2 h^2}{8ma^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Harmonisk, oscillatorpotential, en-dim.:

Potential: $U(x) = \kappa x^2/2$.

Lösning:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0 \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

där $\omega_0 = \sqrt{\kappa/m}$.

Potentialbarriärer

Transmissionssannolikheten och reflektionssannolikheten vid en potentialbarriär beror av energin U_0 , dess längd a och den inkommande partikelns energin E .

Om $E > U_0$ så har vi:

$$R = \frac{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right]}{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(\frac{E}{U_0} - 1 \right)} \quad (1)$$

$$T = \frac{4 \frac{E}{U_0} \left(\frac{E}{U_0} - 1 \right)}{\sin^2 \left[\sqrt{2m(E - U_0)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(\frac{E}{U_0} - 1 \right)} \quad (2)$$

Om $E < U_0$ så har vi:

$$R = \frac{\sinh^2 \left[\sqrt{2m(U_0 - E)}(a/\hbar) \right]}{\sinh^2 \left[\sqrt{2m(U_0 - E)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0} \right)}$$
$$T = \frac{4 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0} \right)}{\sinh^2 \left[\sqrt{2m(U_0 - E)}(a/\hbar) \right] + 4 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0} \right)}$$

Tunnling genom bred potential:

$$T \approx 16 \frac{E}{U_0} (1 - E/U_0) e^{-2a\sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar} \quad ; \text{ om } a \gg \frac{1}{\alpha},$$

$$\text{där } \alpha = \sqrt{\frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

Operatorer

Exempel på operatorer (en-dim):

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$$

$$\hat{x} = x$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x).$$

Den tidsberoende Schrödingerekvationen i operatorform:

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$$

Väntevärde och osäkerhet

Väntevärdet $\bar{Q}$ för observabeln Q :

$$\bar{Q} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \hat{Q} \Psi(x, t) dx.$$

Osäkerheten ΔQ för en observabel Q skrivs nu:

$$\Delta Q = \sqrt{\overline{(Q^2)} - (\bar{Q})^2}$$

Väteatomen

Coulombpotential från punktkälla/proton:

$$V(\vec{r}) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

kvanttal i lösningen för väteatomen

- huvudkvanttal, $n = 1, 2, 3, \dots$
- bankvanttal, $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$
- magnetiskt kvanttal, $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$
- spinnmagnetiskt kvanttal, $m_s = \pm \frac{1}{2}$

Vätelika atomer - energier

$$E_n = \frac{-m_e e^4 Z^2}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{-Z^2 \cdot 13.6 \text{ [eV]}}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

där Z är antalet protoner i atomkärnan ($Z = 1$ för väte).

Väteatomen - vågfunktioner

Vinkeldel

$$\Phi(\phi) = e^{im_l \phi}, \quad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\Theta(\theta) = P_l^{m_l}(\cos\theta) \quad l = 0, 1, 2, \dots, \\ m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l.$$

l, m_l	$\Theta(\theta)_{l, m_l} \cdot \Phi_{m_l}(\phi) = Y_l^{m_l}$
0, 0	$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
1, 0	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$
1, ± 1	$\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi}$

Radiell del

n, l	$R_{nl}(r)$
1, 0	$\frac{1}{a_0^{3/2}} 2e^{-r/a_0}$
2, 0	$\frac{2}{(2a_0)^{3/2}} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/2a_0}$
2, 1	$\frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{\sqrt{3} \cdot a_0} e^{-r/2a_0}$

Bohrradien a_0 skrivs:

$$a_0 = \frac{(4\pi\epsilon_0)\hbar^2}{me^2}$$

Med insatta naturkonstanter får vi $a_0 = 0.0529 \cdot 10^{-9} \text{ m}$.

Kvantiserad rörelsemängd

$$\begin{aligned} |L| &= \hbar \sqrt{l(l+1)} & l &= 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ L_z &= m_l \hbar & m_l &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \\ |S| &= \hbar \sqrt{s(s+1)} & s &= \frac{1}{2} \text{ (elektron)} \\ S_z &= m_s \hbar & m_s &= \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Magnetiskt dipolmoment

Magnetisk dipolmoment från banrörelse:

$$\vec{\mu}_L = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}.$$

$$\mu_z = -\frac{e}{2m_e} L_z$$

Magnetisk dipolmoment från spinn:

$$\vec{\mu}_S = -g_s \frac{e}{2m_e} \vec{S}$$

Totalt magnetisk dipolmoment:

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S = -\frac{e}{2m} (\vec{L} + g_s \vec{S})$$

Potentiell energi för en magnetisk dipol, μ , i ett yttre magnetiskt fält, $\vec{B} = B_z$:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_z B$$

Spin-bankoppling

Magnetfältet som elektronen upplever från banrörelsen:

$$\vec{B}_L = \frac{\mu_0 e}{4\pi m_e r^3} \vec{L}, \quad (3)$$

Energiskift, ΔU :

$$\Delta U = \vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_L = \frac{\mu_0 e^2}{4\pi m_e^2 r^3} (\vec{S} \cdot \vec{L}) \quad (4)$$

Spektroskopisk notation

s för $l = 0$
p för $l = 1$
d för $l = 2$
f för $l = 3$
g för $l = 4$
h för $l = 5$.

Molekylfysik

Effektiv massa:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Rotationsenergier:

$$E_{\text{rot}} = \frac{L^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) \qquad J = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Vibrationsenergier:

$$E_{\text{vib}} = (V + \frac{1}{2}) h \nu_0 \qquad V = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

där $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/\mu}$.

Fasta tillståndets fysik

Fermi-Dirac-fördelningen:

$$N(\mathcal{E}) = \frac{1}{e^{(\mathcal{E}-\mathcal{E}_F)/k_B T} + 1}$$

Effektiv massa:

$$m_{\text{eff}} = \hbar^2 \left(\frac{d^2 \mathcal{E}}{dk^2} \right)^{-1}$$

Kärnfysik

Weizsäckers halvempiriska formel för bindningsenergin:

$$B_{SE}(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z(Z-1) A^{-1/3} - a_{sym} \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \delta$$

där δ är $+a_p A^{-3/4}$ då Z och N är jämna och $-a_p A^{-3/4}$ då N och Z är udda, och 0 för udda A . Anpassat till experimentdata får vi: $a_v = 15.5$ MeV, $a_s = 16.8$ MeV, $a_c = 0.72$ MeV, $a_{sym} = 23$ MeV, $a_p = 34$ MeV.

Partikelfysik

Standardmodellen i tabellform:

Fermioner					Bosoner
Kvarkar	u upp	c charm	t topp	γ foton	
	d ner	s sär	b botten	g gluon	
Leptoner	ν_e elektron- neutrino	ν_μ myon- neutrino	ν_τ tau- neutrino	Z_0 Z-boson	
	e elektron	μ myon	τ taun	$W^\pm$ W-boson	
				H Higgs	

The Periodic Table of Elements

Hydrogen 1 H 1.00794(7)	element name atomic number Symbol (mean) atomic weight																Helium 2 He 4.002602(2)	
Lithium 3 Li 6.941(2)	Beryllium 4 Be 9.012182(3)																	Fluorine 9 F 18.9984032(5)
Sodium 11 Na 22.98976928(2)	Magnesium 12 Mg 24.3050(6)																	Oxygen 8 O 15.9994(3)
Potassium 19 K 39.0983(1)	Calcium 20 Ca 40.078(4)	Scandium 21 Sc 44.955912(6)	Titanium 22 Ti 47.867(1)	Vanadium 23 V 50.9415(1)	Chromium 24 Cr 51.9961(6)	Manganese 25 Mn 54.938045(5)	Iron 26 Fe 55.845(2)	Cobalt 27 Co 58.933195(5)	Nickel 28 Ni 58.6934(4)	Copper 29 Cu 63.546(3)	Zinc 30 Zn 65.38(2)	Gallium 31 Ga 69.723(1)	Germanium 32 Ge 72.64(1)	Arsenic 33 As 74.92160(2)	Selenium 34 Se 78.96(3)	Bromine 35 Br 79.904(1)	Krypton 36 Kr 83.798(2)	
Rubidium 37 Rb 85.4678(3)	Strontium 38 Sr 87.62(1)	Yttrium 39 Y 88.90585(2)	Zirconium 40 Zr 91.224(2)	Niobium 41 Nb 92.90638(2)	Molybdenum 42 Mo 95.96(2)	Technetium 43 Tc [98]	Ruthenium 44 Ru 101.07(2)	Rhodium 45 Rh 102.90550(2)	Palladium 46 Pd 106.42(1)	Silver 47 Ag 107.8682(2)	Cadmium 48 Cd 112.411(8)	Indium 49 In 114.818(3)	Tin 50 Sn 118.710(7)	Antimony 51 Sb 121.760(1)	Tellurium 52 Te 127.60(3)	Iodine 53 I 126.90447(3)	Xenon 54 Xe 131.293(6)	
Caesium 55 Cs 132.9054519(2)	Barium 56 Ba 137.327(7)	Lutetium 71 Lu 174.9668(1)	Hafnium 72 Hf 178.49(2)	Tantalum 73 Ta 180.9479(1)	Tungsten 74 W 183.84(1)	Rhenium 75 Re 186.207(1)	Osmium 76 Os 190.23(3)	Iridium 77 Ir 192.217(3)	Platinum 78 Pt 195.084(9)	Gold 79 Au 196.966569(4)	Mercury 80 Hg 200.59(2)	Thallium 81 Tl 204.3833(2)	Lead 82 Pb 207.2(1)	Bismuth 83 Bi 208.98040(1)	Polonium 84 Po [208]	Astatine 85 At [209]	Radon 86 Rn [222]	
Francium 87 Fr [223]	Radium 88 Ra [226]	Lawrencium 103 Lr [260]	Rutherfordium 104 Rf [261]	Dubnium 105 Db [262]	Seaborgium 106 Sg [263]	Bohrium 107 Bh [262]	Hassium 108 Hs [265]	Meitnerium 109 Mt [266]	Darmstadtium 110 Ds [269]	Roentgenium 111 Rg [272]	Ununbium 112 Uub [285]	Ununtrium 113 Uut [284]	Ununquadium 114 Uuq [289]	Ununpentium 115 Uup [288]	Ununhexium 116 Uuh [292]	Ununseptium 117 Uus [293]	Ununoctium 118 Uuo [294]	

Lanthanum 57 La 138.90547(7)	Cerium 58 Ce 140.116(1)	Praseodymium 59 Pr 140.90765(2)	Neodymium 60 Nd 144.242(3)	Promethium 61 Pm [146]	Samarium 62 Sm 150.36(2)	Europium 63 Eu 151.964(1)	Gadolinium 64 Gd 157.25(3)	Terbium 65 Tb 158.92535(2)	Dysprosium 66 Dy 162.500(1)	Holmium 67 Ho 164.93032(2)	Erbium 68 Er 167.259(3)	Thulium 69 Tm 168.93421(2)	Ytterbium 70 Yb 173.054(5)
Actinium 89 Ac [227]	Thorium 90 Th 232.03806(2)	Protactinium 91 Pa 231.03588(2)	Uranium 92 U 238.02891(3)	Neptunium 93 Np [237]	Plutonium 94 Pu [244]	Americium 95 Am [243]	Curium 96 Cm [247]	Berkelium 97 Bk [247]	Californium 98 Cf [251]	Einsteinium 99 Es [252]	Fermium 100 Fm [257]	Mendelevium 101 Md [258]	Nobelium 102 No [259]