



**Lösningsförslag till Tentamen
13 Januari 2022**

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Bestäm alla reella tal h för vilka matrisekvationen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & h \\ h & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ h & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

har oändligt många lösningar.

(4 p)

Lösningsförslag. Vi beräknar

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & h \\ h & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ h & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot h + h \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + h \cdot 0 \\ h \cdot 0 + 0 \cdot h + 3 \cdot 1 & h \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3h & 6 \\ 3 & 2h \end{bmatrix} =: A.$$

Matrisekvationen

$$Ax = 0$$

har precis en lösning om och endast om A är inverterbar. Eftersom det finns alltid den triviala lösningen har matrisekvationen oändligt många lösningar om A inte är inverterbar. Matrizen A är inte inverterbar om och endast om $\det A = 3h \cdot 2h - 3 \cdot 6 = 0$. Det gäller om och endast om $h \in \{\pm\sqrt{3}\}$.

□

Svar. $h \in \{\pm\sqrt{3}\}$.

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm den ortogonala projektionen, $\text{proj}_{\text{Col } A} \mathbf{b}$, av $\mathbf{b}$ på kolonnrummet av A .

(4 p)

Lösningsförslag. Låt $\mathbf{a}_1 = [1 \ 1 \ 0]^T$ vara den första och $\mathbf{a}_2 = [1 \ 0 \ -1]^T$ den andra kolonnen av A . Eftersom $\mathbf{a}_1$ och $\mathbf{a}_2$ är inte multipel av varandra är kolonnrummet $\text{Col } A$ ett plan i $\mathbb{R}^3$ och $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ en bas av $\text{Col } A$. Vi använder Gram-Schmidt processen för att skapa en ortogonal bas $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ av $\text{Col } A$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &:= \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v}_2 &:= \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Eftersom $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ är en ortogonal bas av $\text{Col } A$ erhåller vi

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\text{Col } A} \mathbf{b} &= \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} \mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle} \mathbf{v}_2 \\ &= 0 \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{-1}{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativt: Låt $L = (\text{Col } A)^\perp \subset \mathbb{R}^3$ betecknar det ortogonala komplementet som är en linje och spänns upp av

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} =: \mathbf{n}.$$

Då gäller

$$\text{proj}_{\text{Col } A} \mathbf{b} = \mathbf{b} - \text{proj}_L \mathbf{b} = \mathbf{b} - \frac{\langle \mathbf{b}, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

□

Svar. $\text{proj}_{\text{Col } A} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$

3. Givet matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en inverterbar matris P och en diagonalmatris D sådana att $D = P^{-1}AP$.

(1 poäng av 4 poäng ges för att visa att egenvärdena till A är -1 och 3 .)

(4 p)

Lösningsförslag. Det karakteristiska polynomet ges av

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1 - \lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (-1 - \lambda) \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= -(\lambda + 1)((1 - \lambda)^2 - (-2)^2) \\ &= -(\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda + 1) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 3) \end{aligned}$$

vilket visar att egenvärdena är -1 och 3 . Motsvarande egenvektorer ges av nollrummen till matriserna $A + I_3$ och $A - 3I_3$. Gausselimination ger

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vilket visar att $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, respektive $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ är egenvektorer. Vi får en inverterbar matris P som uppfyller $P^{-1}AP = D$ genom att sätta dem som kolonner i P ; motsvarande egenvärdena sätter vi på diagonalen av en diagonalmatris D . Alltså

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

och

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Då gäller $P^{-1}AP = D$.

□

Svar. $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

4. Låt $\Pi = [0, 1]^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_i \leq 1 \text{ för alla } i = 1, 2, 3\}$ vara enhetskuben och låt $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen som ges av

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Visa att avbildningen är bijektiv och beräkna volymen, $\text{vol}(T^{-1}(\Pi))$, av bilden av Π under den inversa avbildningen T^{-1} .

(4 p)

Lösningsförslag. Vi observera att $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi beräknar determinanten av A . Utveckling efter sista kolonnen ger

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1^2 - (-1) \cdot 1 = 2 \neq 0$$

Alltså är A inverterbar och därmed är T bijektiv. Den inversa avbildningen T^{-1} är lika med $T_{A^{-1}}$. Volumen av enhetskuben Π är lika med 1. Volumen av bilden av Π under den linjära avbildningen $T_{A^{-1}}$ ges därmed av

$$\text{vol}(T^{-1}(\Pi)) = |\det(A^{-1})| \cdot \text{vol } \Pi = \frac{1}{|\det(A)|} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

□

Svar. Volymen av $T^{-1}(\Pi)$ är lika med $\frac{1}{2}$.

5. Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ och $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ vara baser för $\mathbb{R}^2$ som ges av

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestäm basbytematriserna $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ och $\mathcal{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$.

(4 p)

Lösningsförslag. Vi har

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \mathbf{b}_1 + 1 \cdot \mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{c}_2 = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \mathbf{b}_1 + 0 \cdot \mathbf{b}_2$$

Alltså har vi $[\mathbf{c}_1]_{\mathcal{B}} = [-1 \ 1]^T$ och $[\mathbf{c}_2]_{\mathcal{B}} = [2 \ 0]^T$ och därmed

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Basbytematrisen $\mathcal{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ ges av

$$\mathcal{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

□

Svar. $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $\mathcal{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt $T: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ vara avbildningen som ges av

$$T \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{22} & a_{11} \\ a_{22} & a_{11} + a_{22} \end{bmatrix}.$$

(i) Visa att T är en linjär avbildning.

(2 p)

(ii) Bestäm en bas till bildrummet av T ,

$$\text{Im } T = \{T(A) : A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}\},$$

och en bas till nollrummet av T ,

$$\text{Nul } T = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : T(A) = 0\}.$$

(4 p)

Lösningsförslag. (i) För alla 2×2 matriser $A = (a_{ij})$ och $B = (b_{ij})$ och alla skalärer $c \in \mathbb{R}$ gäller

$$\begin{aligned} T(A+B) &= T \left(\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11}) - (a_{22}+b_{22}) & a_{11}+b_{11} \\ a_{22}+b_{22} & (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11}-a_{22}) + (b_{11}-b_{22}) & a_{11}+b_{11} \\ a_{22}+b_{22} & (a_{11}+a_{22}) + (b_{11}+b_{22}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}-a_{22} & a_{11} \\ a_{22} & a_{11}+a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}-b_{22} & b_{11} \\ b_{22} & b_{11}+b_{22} \end{bmatrix} \\ &= T(A) + T(B) \end{aligned}$$

och

$$T(cA) = \begin{bmatrix} ca_{11} - ca_{22} & ca_{11} \\ ca_{22} & ca_{11} + ca_{22} \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} a_{11} - a_{22} & a_{11} \\ a_{22} & a_{11} + a_{22} \end{bmatrix} = cT(A).$$

Alltså är T en linjär avbildning.

(ii) För varje matris $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ har vi

$$T(A) = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{22} & a_{11} \\ a_{22} & a_{11} + a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Låt

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Då har vi alltså att $T(A) \in \text{span}\{B_1, B_2\}$ för alla 2×2 matriser A . Å andra sidan är varje linjär kombination $\lambda B_1 + \mu B_2$ i bildrummet eftersom

$$T \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \right) = \lambda B_1 + \mu B_2.$$

Därmed är bildrummet $\text{Im } T$ lika med $\text{span}\{B_1, B_2\}$. Eftersom B_1 och B_2 är inte multipel av varandra är $\{B_1, B_2\}$ en linjärt oberoende mängd av vektorer som spänner upp $\text{Im } T$. Därmed är $\{B_1, B_2\}$ en bas till $\text{Im } T$.

En matris $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ är i nollrummet av T om

$$T(A) = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{22} & a_{11} \\ a_{22} & a_{11} + a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alltså måste gälla att $a_{11} = 0$ och $a_{22} = 0$. Eftersom

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} = a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

erhåller vi att $\text{Nul } T \subseteq \text{span}\{C_1, C_2\}$ där

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Å andra sidan har vi att

$$T(\lambda C_1 + \mu C_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och därmed att $\text{span}\{C_1, C_2\} \subseteq \text{Nul } T$. Sammanfattad har vi att $\text{span}\{C_1, C_2\} = \text{Nul } T$, och eftersom $\{C_1, C_2\}$ är linjärt oberoende (C_1 och C_2 är inte multipel av varandra) har vi att $\{C_1, C_2\}$ är en bas av $\text{Nul } T$.

□

7. Låt $\mathbf{v}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^3$ som är skild från nollvektorn. Låt $T_{\mathbf{v}}$ vara den linjära avbildning som ges av

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{v}}: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{x} \end{aligned}$$

- (i) Bestäm om $T_{\mathbf{v}}$ är injektiv. (2 p)
 (ii) Låt $\mathbf{w}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^3$ som är ortogonal mot $\mathbf{v}$ och skild från nollvektorn. Låt $\mathcal{B}$ vara den ortogonala basen som ges av $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}\}$. Bestäm matrisrepresentationen, $[T_{\mathbf{v}}]_{\mathcal{B}}$, av $T_{\mathbf{v}}$ med avseende på basen $\mathcal{B}$. (4 p)

Lösningsförslag. (i) Vi har $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, vilket visar att $\mathbf{0}$ är inte den enda vektorn som avbildas till nollvektorn. Alltså är $T_{\mathbf{v}}$ inte injektiv.

(ii) Låt $\mathbf{w}$ vara en vektor som är ortogonalt mot $\mathbf{v}$ och skild från noll. Då bilda $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}\}$ en ortogonal bas av $\mathbb{R}^3$. Vi har

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) &= \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{w} + 0 \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} \\ T_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) &= \mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{w} + 1 \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} \\ T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{v} \times \begin{bmatrix} v_2 w_3 - w_2 v_3 \\ v_3 w_1 - w_3 v_1 \\ v_1 w_2 - w_1 v_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_2(v_1 w_2 - w_1 v_2) - (v_3 w_1 - w_3 v_1)v_3 \\ v_3(v_2 w_3 - w_2 v_3) - (v_1 w_2 - w_1 v_2)v_1 \\ v_1(v_3 w_1 - w_3 v_1) - (v_2 w_3 - w_2 v_3)v_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) - w_1(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \\ v_2(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) - w_2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \\ v_3(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) - w_3(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \end{bmatrix} \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{v} - \|\mathbf{v}\|^2 \mathbf{w} \\ &= -\|\mathbf{v}\|^2 \mathbf{w} = 0 \cdot \mathbf{v} - \|\mathbf{v}\|^2 \cdot \mathbf{w} + 0 \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Här har vi använt att $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ eftersom $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är ortogonala mot varandra. Från ovanstående beräkningarna ser vi att

$$[T_{\mathbf{v}}]_{\mathcal{B}} = [[T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} \ [T_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})]_{\mathcal{B}} \ [T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})]_{\mathcal{B}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\|\mathbf{v}\|^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alternativt kan man på följande sätt argumentera att $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -\|\mathbf{v}\|^2 \mathbf{w}$: Vi har $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. Eftersom kryssprodukten ger en vektor som är ortogonalt mot båda argumenter och eftersom $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}\}$ är en ortogonal bas får vi att $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ är en multipel av vektorn $\mathbf{w}$. Längden av $\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ ges av arean av parallelogrammet som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}$ och $(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. Eftersom båda vektorer är ortogonala mot varandra är arean lika med produkten av längderna av vektorerna. Samma argument ger att längden av vektorn $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ är lika med produkten av längderna av $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$. Sammanfattat har vi

$$\|T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})\| = \|\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})\| = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|.$$

Eftersom $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ är en multipel av vektorn $\mathbf{w}$ finns det bara två möjligheter: Antingen $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \|\mathbf{v}\|^2 \mathbf{w}$ eller $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -\|\mathbf{v}\|^2 \mathbf{w}$. Det rätta tecken följer nu från höger hand regeln. $\square$

8. Låt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara en inre produkt på $\mathbb{R}^n$.

(i) Visa att det finns en symmetrisk matris $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ som har bara positiva egenvärden sådan att

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$$

för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

(3 p)

(ii) Visa att det finns en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sådan att

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = T(\mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{y})$$

för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, där $\cdot$ betecknar den vanliga inre produkten på $\mathbb{R}^n$.

(3 p)

Lösningförslag. (i): Låt $A = (a_{ij})$ vara matrisen med $a_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$ där $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ beteckar standardbasvektorerna. Då har vi

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle x_i y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i \mathbf{e}_i, y_j \mathbf{e}_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{e}_j \right\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

enligt axiomerna för skalärprodukter. Från axiomerna för inre produkter följer dessutom att $a_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle = a_{ji}$, alltså att A är symmetrisk. Eftersom inre produkten av en vektor med sig själv är alltid större än noll för alla icke-nollvektorer har vi $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$. Det betyder att den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ är positivt definit och därmed är alla egenvärden av A positiva.

(ii) Låt A vara den unika symmetriska matrisen sådan att $\mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Enligt spektralsatsen finns det en ortogonal matris P och en diagonalmatris D sådan att $D = P^T A P$. Egenvärdena ligger på diagonalen av D och är enligt uppgift (i) positiva. Låt

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad F = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Då har vi

$$A = P D P^T = P F^2 P^T = P F F^T P^T = P F (P F)^T.$$

Vi definierar $T(\mathbf{x}) = (P F)^T \mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Då är T en linjär avbildning och

$$T(\mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{y}) = ((P F)^T \mathbf{x})^T (P F)^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T P F (P F)^T \mathbf{y} = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

Alternativt: Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ vara en ortonormerad bas till vektorrummet med avseende på den inre produkten $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Låt $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_n \mathbf{b}_n$ och $\mathbf{y} = d_1 \mathbf{b}_1 + \dots + d_n \mathbf{b}_n$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$; alltså $[c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]^T = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ och $[d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n]^T = [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}}$. Från räknereglererna för inre produkter följer

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{b}_i, \sum_{j=1}^n d_j \mathbf{b}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i d_j \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = \sum_{i=1}^n c_i d_i = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \cdot [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}}.$$

Här har vi också använt att $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = 1$ om $i = j$ och $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j \rangle = 0$ om $i \neq j$ eftersom $\mathcal{B}$ är en ortonormerad bas. Eftersom koordinatavbildningen $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ är en linjär avbildning så visa detta påståendet (ii).

□