

Tentamen del 2

Numeriska metoder SF1544 och BE3003

8.00-11.00 15/3 2019

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Det finns två varianter av uppgift 3. Endast en av dem får lösas.

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas endast om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng, av maximalt 50 poäng på del 2.

1. Vi vill lösa ekvationen $x + \ln(x) = 0$, som har en rot $x^* \approx 0.5$. Betrakta följande iterationsformler:

$$(1) \quad x_{n+1} = -\ln(x_n),$$

$$(2) \quad x_{n+1} = e^{-x_n},$$

$$(3) \quad x_{n+1} = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2},$$

med $n = 0, 1, 2, \dots$

- (a) (3p) Vilka av dessa iterationsformler kan användas?
(b) (3p) Vilken av dessa iterationsformler är bäst att använda?
(c) (4p) Konstruera en ännu bättre iterationsformel.

(a) Ett villkor för lokal konvergens av fixpunktsiterationer $x_{n+1} = g(x_n)$ till en lösning x^* som uppfyller $x^* = g(x^*)$ är $|g'(x^*)| < 1$. Eftersom $x^* \approx 1/2$ och $g'_1(1/2) = -2$, $g'_2(1/2) = 1/\sqrt{e} \approx 0.6$, $g'_3(1/2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{e}} \approx 0.2$, där $g_1(x) = -\ln x$, $g_2(x) = e^{-x}$, $g_3(x) = \frac{x+e^{-x}}{2}$, så konvergerar iterationsformel (2) och (3).

(b) Fixpunktsmetoden har linjär konvergens med hastighet $|g'(\alpha)|$. Alltså är iterationsformel (3) bäst.

(c) Newtons metod har kvadratisk konvergens, vilket asymptotiskt säkert ger snabbare konvergens än metoder med linjär konvergens. Newtons metod med $f(x) = x + \ln x$ ges av

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n + \ln x_n}{1 + 1/x_n}.$$

2. Givet begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 10t \frac{dy}{dt} = 0, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 1.$$

- (a) (2p) Skriv om differentialekvationen som ett system av första ordningens differentialekvationer. Kom ihåg begynnelsevillkoren.
- (b) (4p) Beräkna en approximation (genom att räkna för hand) av $y(0.4)$ och $y'(0.4)$ med framåt Euler med steglängden $h = 0.2$.
- (c) (4p) Utnyttja dina beräknade värden i (b) för att bestämma

$$\int_0^{0.4} y(t) dt$$

med trapetsregeln och steglängden $h = 0.2$. Har du inte gjort uppgift (b) får du i stället räkna med de fiktiva värdena $y(0.2) = 0.28$ och $y(0.4) = 0.44$.

- (d) (4p) När integralen i uppgift (c) beräknas med steglängderna $h = 0.02$, $h = 0.01$ och $h = 0.005$ (steglängden är densamma både i Eulers metod och för trapetsregeln) uppskattar man felen till $7.6 \cdot 10^{-4}$, $3.9 \cdot 10^{-4}$ och $2.0 \cdot 10^{-4}$. Använd värdena för att uppskatta noggrannhetsordningen i det beräknade integralvärdet och förklara varför den inte blir 2, som den borde vara då trapetsregeln används.
- (e) (2p) Hur skulle man kunna ändra lösningsförfarandet för att få noggrannhetsordning 2 vid integralberäkningen?

(a) Låt $u_1(t) = y(t)$ och $u_2(t) = y'(t)$. Då gäller

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} &= u_2, \\ \frac{du_2}{dt} &= 10tu_2,\end{aligned}$$

och $u_1(0) = 0$, $u_2(0) = 1$.

(b) Systemet av första ordningens differentialekvationer kan skrivas $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$, där

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_2 \\ 10tu_2 \end{pmatrix}.$$

Eulers metod ges av $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + h\mathbf{f}(t^n, \mathbf{u}^n)$. Med $\mathbf{u}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhålls

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}^2 &= \begin{pmatrix} 0.2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.4 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Så Euler-approximationen blir $y(0.4) \approx 0.4$, $y'(0.4) \approx 1.4$.

(c) Med trapetsregeln får vi att

$$\int_0^{0.4} y(t) dt \approx h \left(\frac{y(0)}{2} + y(0.2) + \frac{y(0.4)}{2} \right) \approx 0.2 \left(0 + 0.2 + \frac{0.4}{2} \right) = 0.08.$$

(d) Av de givna data framgår att felet är ungefär proportionellt mot steglängden h , dvs. metoden har noggrannhetsordning 1. Om vi med $\tilde{T}_h$ betecknar trapetsapproximationen av integralen med Euler-lösningen av differentialekvationen, och med T_h trapetsapproximationen med användning av den exakta lösningsfunktionen $y(t)$, så får vi med hjälp av triangelolikheten

$$|\int_0^{0.4} y(t) dt - \tilde{T}_h| \leq |\int_0^{0.4} y(t) dt - T_h| + |T_h - \tilde{T}_h| =: I + II.$$

Trapetsmetoden är konvergent av ordning två, så $|I| \leq Ch^2$, men eftersom Eulers metod har noggrannhetsordning ett har vi att $|II| \leq Ch$, och därmed är även det totala felet av noggrannhetsordning ett.

(e) Till det system av differentialekvationer vi formulerade i uppgift (a) kan vi lägga differentialekvationen

$$\frac{du_3}{dt} = u_1, \quad u_3(0) = 0.$$

Det kommer då att gälla att $u_3(0.4) = \int_0^{0.4} y(t) dt$. Genom att använda trapetsmetoden för differentialekvationssystemet som u_1 , u_2 och u_3 löser så får vi en andra ordningens approximation av integralen. Trapetsmetoden tillämpad på en differentialekvation $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{u}(t))$ ges av

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \frac{h}{2}(\mathbf{g}(t^n, \mathbf{u}^n) + \mathbf{g}(t^{n+1}, \mathbf{u}^n + h\mathbf{g}(t^n, \mathbf{u}^n))).$$

3. Dubbelintegralen $I = \iint_D \sin(e^{x+y}) dx dy$, där D är området som utgörs av unionen av ellipserna $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} \leq 1$ och $\frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} \leq 1$, ska approximeras numeriskt.

- (a) (6p) Beskriv en algoritm för Monte-Carlo-approximation av integralen I .
 (b) (6p) Skriv en Matlab-kod som beräknar Monte-Carlo-approximationen av I från uppgift (a).
 (Tips: Om man skriver `help rand` i Matlab får man följande information: `R = rand(N)` returns an N-by-N matrix containing pseudorandom values drawn from the standard uniform distribution on the open interval(0,1). `rand(M,N)` or `rand([M,N])` returns an M-by-N matrix.)

(a) Området D är en delmängd av rektangeln $R := \{(x, y) : -2 \leq x \leq 4, -3 \leq y \leq 3\}$. Genom att införa indikatorfunktionen

$$\chi_D(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$$

kan integralen skrivas

$$I = \iint_D \sin(e^{x+y}) dx dy = \iint_R \chi_D(x, y) \sin(e^{x+y}) dx dy.$$

Eftersom

$$\frac{1}{|R|} \iint_R \chi_D(x, y) \sin(e^{x+y}) dx dy$$

(där $|R| = 36$ är arean av R) är medelvärdet av funktionen $\chi_D(x, y) \sin(e^{x+y})$ över R , kan integralen approximeras som ett medelvärde med Monte-Carlo-metoden:

$$I \approx 36 \sum_{n=1}^N \chi_D(x_n, y_n) \sin(e^{x_n+y_n}) / N.$$

Koordinaterna x_n och y_n för alla n är oberoende och dragna från de likformiga fördelningarna på $[-2, 4]$ respektive $[-3, 3]$.

(b) Här är en Matlab-kod som approximerar integralen med $N = 10^6$ punkter i R :

```
N=1e6; %Antal samples
x=-2+6*rand(N,1); y=-3+6*rand(N,1);
I=0; %initialisering

for n=1:N
    if x(n)^2/4+y(n)^2/9<=1 | (x(n)-2)^2/4+y(n)^2/9<=1
        I=I+sin(exp(x(n)+y(n)));
    end
end

I=36*I/N;
disp(['Monte-Carlo-approximationen= ', num2str(I)])
```

Alternativ uppgift 3 (12p) Formulera och bevisa en sats om existens och entydighet av polynom interpolerande n punkter.

4. (12p) Bestäm det minsta tal $K > 0$ sådant att Newtons metod använd på ekvationen $|x|^\alpha e^x = 0$ konvergerar till lösningen $x = 0$ för alla $\alpha > K$, givet att startpunkten är tillräckligt nära $x = 0$. För alla $\alpha > K$, bestäm konvergensordningen.

4. Vi låter $f(x) = |x|^\alpha e^x$, vilket för $x \neq 0$ ger $f'(x) = |x|^\alpha e^x + \alpha \operatorname{sgn}(x) |x|^{\alpha-1} e^x$, där sgn är teckenfunktionen

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Därmed har vi kvoten

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{|x|^\alpha e^x}{|x|^\alpha e^x + \alpha \operatorname{sgn}(x) |x|^{\alpha-1} e^x} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha \operatorname{sgn}(x)}{|x|}} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{x}}.$$

Newton's metod för $f(x) = 0$ ges därför av

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{x_n}} = \frac{x_n^2 + (\alpha - 1)x_n}{x_n + \alpha}.$$

Vi undersöker konvergensen genom att titta på kvoten mellan två på varandra följande iterat:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n + \alpha - 1}{x_n + \alpha}.$$

Ett tillräckligt villkor för konvergens är därför att gränsvärdet av uttrycket ovan då $x_n \rightarrow 0$ till beloppet ska vara mindre än ett, dvs.

$$\left| \frac{\alpha - 1}{\alpha} \right| < 1,$$

vilket, eftersom vi endast betraktar positiva α , är ekvivalent med $\alpha > 1/2$. Vi har alltså funnit att $K = 1/2$. För alla $\alpha > K$ och $\alpha \neq 1$ ser vi att konvergensen är linjär (med hastighet $|\frac{\alpha-1}{\alpha}|$). Vi testar om konvergensordningen för $\alpha = 1$ är två:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n^2} = \frac{1}{x_n + \alpha} \rightarrow \frac{1}{\alpha},$$

då $x_n \rightarrow 0$. (Man kan också visa att Newton's metod konvergerar för $\alpha = 1/2$, men det är jobbigare. Konvergenshastigheten blir för detta α långsammare än linjär.)