



Lösningsförslag till tentamen
24 april 2025

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. En Hammingkod C av längd 7 ges av nollrummet till matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

med koefficienter i kroppen $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

- (a) Bestäm en bas för C . (2 p)
(b) Bestäm ett delrum $W \subseteq \mathbb{F}_2^7$ som uppfyller $W \oplus C = \mathbb{F}_2^7$ som inre direkt summa. (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Första, andra och fjärde kolonnen bildar identitetsmatrisen efter radbyte. Vi kan därför låta de övriga kolonnerna utgöra fria variabler och får därmed en bas för C som består av

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- (b) Vi kan välja en bas för W som svarar mot de kolonner som är bundna variabler eftersom C inte innehåller några nollskilda vektorer som är noll i alla fria variabler. Därmed ges W av

$$\text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{F}_2 \right\}$$

Svar.

- (a) $\{[1110000]^T, [1001100]^T, [0101010]^T, [1101001]^T\}$ är en bas för C .
(b) $W = \{[a \ b \ 0 \ c \ 0 \ 0 \ 0]^T : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ är ett sådant komplement.

2. Låt $V = \mathbb{C}^5$ och

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_5\}$$

där $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ är standardbasen för $\mathbb{C}^5$. Bestäm den duala basen $\mathcal{B}^*$ för V^* .
(4 p)

Lösningsförslag. Vi skriver den givna basen som $\mathcal{B} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4, \mathbf{f}_5\}$. Om vi betraktar de duala vektorerna som radvektorer $\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{bmatrix}$ kan vi ställa upp villkoren $\mathbf{f}_i(\mathbf{f}_j) = \delta_{ij}$ som

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

och vi får

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

där inversen kan beräknas genom Gausselimination eller genom att använda att

$$(I - N)^{-1} = I + N + N^2 + N^3 + N^4,$$

då $N^5 = 0$. Den duala basen ges därmed av

$$\mathcal{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3^*, \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3^* + \mathbf{e}_4^*, \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3^* + \mathbf{e}_4^* + \mathbf{e}_5^*\}$$

Svar. $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3^*, \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3^* + \mathbf{e}_4^*, \mathbf{e}_1^* + \mathbf{e}_2^* + \mathbf{e}_3^* + \mathbf{e}_4^* + \mathbf{e}_5^*\}$ är den duala basen.

3. Bestäm singularvärden och en ortonormal bas av vänstersingulära vektorer till den reella matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

Lösningsförslag. Vi beräknar AA^T och får

$$B = AA^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

som har egenvärden 8 och 2, med egenvektorer som ges av nollrummen till

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{respektive} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

vilket ger egenrummen

$$E_8 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

och

$$E_2 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Vänstersingulärvektorerna ges av ON-baser för dessa, dvs

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \right\}.$$

där vi kan få den sista vektorn genom Gram-Schmidt eller som kryssprodukt av de två första. Singularvärdena för A är kvadratrötterna av egenvärdena för B , dvs $\sqrt{2}$ och $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Svar. Singularvärdena är $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ och $\sqrt{2}$ med ON-bas av vänstersingulära vektorer som ges av

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \right\}.$$

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Definiera begreppet *adjungerad operator*. (1 p)
(b) Ge ett exempel på en operator som saknar adjungerad operator. (1 p)
(c) Visa att alla egenvärden till en självadjungerad operator på ett komplext inre produktrum är reella. (1 p)
(d) Visa att egenvektorer som tillhör olika egenrum till en självadjungerad operator är ortogonala mot varandra. (1 p)

Lösningsförslag.

- (a) $L^\dagger$ är adjungerad operator till $L : V \longrightarrow V$ om $\langle L^\dagger(\mathbf{x})|\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}|L(\mathbf{y}) \rangle$ för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ i ett inreproduktrum V .
(b) Om $\{\mathbf{e}_i\}_{i=0}^\infty$ är en ON-bas för V och $L(\mathbf{e}_n) = \sum_{i=0}^n \mathbf{e}_i$ kan det inte finnas någon adjungerad operator $L^\dagger$ eftersom $L^\dagger(\mathbf{e}_0)$ måste uppfylla $\langle L^\dagger(\mathbf{e}_0)|\mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{e}_0|L(\mathbf{e}_i) \rangle = 1$ för alla $i \geq 0$.
(c) Om L är självadjungerad och λ är ett egenvärde till L så finns en nollskild vektor $\mathbf{x}$ så att $L(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ och vi får $\langle L(\mathbf{x})|\mathbf{x} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{x}|\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}|L(\mathbf{x}) \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}|\mathbf{x} \rangle$, vilket ger $\lambda = \bar{\lambda}$ eftersom $\langle \mathbf{x}|\mathbf{x} \rangle \neq 0$. Alltså är λ reellt.
(d) Om L är självadjungerad och $L(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ och $L(\mathbf{y}) = \mu \mathbf{y}$ där $\mathbf{x}$ och $\mathbf{y}$ är nollskilda och $\lambda \neq \mu$ får vi

$$\langle L(\mathbf{x})|\mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}|\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}|L(\mathbf{y}) \rangle = \mu \langle \mathbf{x}|\mathbf{y} \rangle.$$

Eftersom $\lambda \neq \mu$ och $\lambda \langle \mathbf{x}|\mathbf{y} \rangle = \mu \langle \mathbf{x}|\mathbf{y} \rangle$ måste $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y} \rangle = 0$, dvs $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.

5. (a) Definiera begreppet *primkropp*. (1 p)
 (b) Visa att primkroppen i en kropp måste vara isomorf med $\mathbb{Q}$ eller med $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ för något primtal p . (1 p)
 (c) Ge ett explicit exempel på en kropp med precis nio element. (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Primkroppen är den minsta delkropp som innehåller ettan.
 (b) Om $\{0, 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots\}$ är ändlig måste vi ha $1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 0$ för något antal ettor. Det minsta sådant måste vara ett primtal p eftersom vi annars skulle ha $(1 + 1 + \dots + 1)(1 + 1 + \dots + 1) = 0$, vilket skulle motsäga minimaliteten. Därmed finns en delkropp $k = \{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$ som är isomorf med $\mathbb{F}_p$. Om mängden är oändlig måste vi ha en delmängd som är isomorf med de naturliga talen. Eftersom alla nollskilda element är inverterbara får vi också $(1 + 1 + 1 + \dots + 1)/(1 + 1 + 1 + \dots + 1) = m/n$, för alla $n \neq 0$. Dessa element tillsammans med sina additiva inverser bildar en delkropp som är isomorf med $\mathbb{Q}$.
 (c) Vi kan välja ett irreducibelt polynom $q(x)$ av grad två över $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, exempelvis $q(x) = x^2 + 1$. Sedan kan vi välja en matris som har detta som karaktäristiskt polynom, exempelvis

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mängden $K = \{aI + bA : a, b \in \mathbb{F}_3\}$ bildar nu en kropp med nio element.

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \right. \\ \left. \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \right. \\ \left. \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Avgör vilka karaktäristiska polynom som är möjliga för 4×4 -matriser A med koefficienter i $\mathbb{C}$ med minimalpolynom $q_A(x) = x^3 + 2x^2 + x$. Ge exempel på en matris för varje sådant polynom. **(4 p)**

Lösningsförslag. Minimalpolynomet är en delare i det karaktäristiska polynomet som har grad fyra. Alltså måste det karaktäristiska polynomet vara $p_A(x) = q_A(x)(x - a)$ för något a . Eftersom a måste vara ett egetvärde till A måste det också vara ett nollställe till $q_A(x) = x(x + 1)^2$. Därmed finns två möjligheter, $a = 0$ och $a = -1$. Om $a = 0$ är det karaktäristiska polynomet $p_A(x) = x^2(x + 1)^2$. Jordanformen för A måste då vara

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Om $a = -1$ får vi att det karaktäristiska polynomet $p_A(x) = x(x + 1)^3$. För att minimalpolynomet ska ha $(x + 1)^2$ som faktor måste matrisen ha ett Jordanblock av storlek 2 till egetvärdet -1 . Jordanformen för A måste då vara

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Svar. Det karaktäristiska polynomet kan vara $p_A(x) = x(x + 1)^3$ eller $p_A(x) = x^2(x + 1)^2$. Exempel på matriser som har dessa är

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

7. Matrisen B är nilpotent och har två Jordanblock av storlek 2×2 och tre Jordanblock av storlek 1×1 . Matrisen A uppfyller $A^2 = B$. Avgör vilka möjligheter det finns för Jordanformen för A . (4 p)

Lösningsförslag. Eftersom alla block i B har storlek 2 eller mindre är $B^2 = 0$, vilket innebär att $A^4 = 0$ och därmed har blocken i A storlek 4 eller mindre. Vi beräknar kvadraterna av dessa block och får

$$J_4^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_1^2 = [0]^2 = [0]$$

Mer allmänt har vi att kvadraten av ett Jordanblock J av storlek $2n$ har två block av storlek n eftersom det uppfyller $(J^2)^n = 0$ och $\dim \ker J^2 = 2$. På motsvarande sätt har kvadraten av ett Jordanblock av storlek $2n + 1$ ett block av storlek $n + 1$ och ett av storlek n .

De två blocken av storlek 2 i A^2 kan antingen komma från ett block av storlek 4 eller från två block av storlek 3. I det första fallet kan de tre blocken av storlek 1 antingen komma från ett block av storlek 2 och ett block av storlek 1 eller från tre block av storlek 1. I det andra fallet måste det sista blocket av storlek 1 komma från ett block av storlek 1. Vi har alltså tre möjligheter.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Svar. Blocken kan ha storlek 4, 2 och 1, eller 4, 1, 1, och 1, eller 3, 3 och 1.

8. Låt V och W vara ändligtdimensionella komplexa inre produktrum. Visa att det finns en inre produkt på $V \otimes W$ som uppfyller att
- (a) $\langle \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2 \rangle$, för $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ i V och $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ i W , (2 p)
- och att
- (b) $L_1 \otimes L_2$ är en unitär operator på $V \otimes W$ om L_1 är en unitär operator på V och L_2 är en unitär operator på W . (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Om $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m\}$ är en ON-bas för V och $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ är en ON-bas för W kan vi definiera en inre produkt på $V \otimes W$ genom att låta $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j\}_{i=1, j=1}^{m, n}$ vara en ON-bas. Vi får då att $\langle \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j | \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{f}_l \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl} = \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_k \rangle \langle \mathbf{f}_j | \mathbf{f}_l \rangle$. Därmed får vi också att för $\mathbf{v}_1 = \sum a_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{v}_2 = \sum c_i \mathbf{e}_i \in V$ och $\mathbf{w}_1 = \sum b_i \mathbf{f}_i$, $\mathbf{w}_2 = \sum d_i \mathbf{f}_i \in W$ är

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}_1 | \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}_2 \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j \middle| \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n c_k d_l \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{f}_l \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \overline{a_i b_j} c_k d_l \langle \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j | \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{f}_l \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \overline{a_i} c_k \overline{b_j} d_l \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_k \rangle \langle \mathbf{f}_j | \mathbf{f}_l \rangle \\ &= \left(\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \overline{a_i} c_k \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_k \rangle \right) \left(\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \overline{b_j} d_l \langle \mathbf{f}_j | \mathbf{f}_l \rangle \right) \\ &= \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle \langle \mathbf{w}_1 | \mathbf{w}_2 \rangle \end{aligned}$$

- (b) För en vektor $\mathbf{x} = \sum_{i=1, j=1}^{m, n} a_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j$ får vi

$$(L_1 \otimes L_2)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1, j=1}^{m, n} a_{ij} L_1(\mathbf{e}_i) \otimes L_2(\mathbf{f}_j)$$

Vi beräknar $\langle (L_1 \otimes L_2)(\mathbf{x}) | (L_1 \otimes L_2)(\mathbf{x}) \rangle$ och om L_1 och L_2 är unitära får vi

$$\begin{aligned} \langle (L_1 \otimes L_2)(\mathbf{x}) | (L_1 \otimes L_2)(\mathbf{x}) \rangle &= \left\langle \sum_{i,j} a_{ij} L_1(\mathbf{e}_i) \otimes L_2(\mathbf{f}_j) \middle| \sum_{k,l} a_{kl} L_1(\mathbf{e}_k) \otimes L_2(\mathbf{f}_l) \right\rangle \\ &= \sum_{i,j} \sum_{k,l} \overline{a_{ij}} a_{kl} \langle L_1(\mathbf{e}_i) \otimes L_2(\mathbf{f}_j) | L_1(\mathbf{e}_k) \otimes L_2(\mathbf{f}_l) \rangle \\ &= \sum_{i,j} \sum_{k,l} \overline{a_{ij}} a_{kl} \langle L_1(\mathbf{e}_i) | L_1(\mathbf{e}_k) \rangle \langle L_2(\mathbf{f}_j) | L_2(\mathbf{f}_l) \rangle \\ &= \sum_{i,j} \sum_{k,l} \overline{a_{ij}} a_{kl} \langle \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_k \rangle \langle \mathbf{f}_j | \mathbf{f}_l \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i,j} a_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j \middle| \sum_{k,l} a_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{f}_l \right\rangle = \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \end{aligned}$$

Alltså bevarar $L_1 \otimes L_2$ längd och eftersom dimensionen är ändlig är detta tillräckligt för att dra slutsatsen att $L_1 \otimes L_2$ är unitär.

9. Låt V vara ett komplext vektorrum av dimension n och låt $X \subseteq V \otimes V$ och $Y \subseteq V \otimes V \otimes V$ vara mängderna som ges av

$$X = \{\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u} : \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V\}$$

och

$$Y = \{2\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} : \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V\}.$$

- (a) Bestäm dimensionen av $\text{span } X \subseteq V \otimes V$. (2 p)
 (b) Bestäm dimensionen av $\text{span } Y \subseteq V \otimes V \otimes V$. (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Vi kan bilda den linjära operatoren $L : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$ som ges av den bilinjära avbildningen $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$. Bildrummet $\text{im}(L)$ är det linjära höljet till X . Vi kan skriva en bas för $V \otimes V$ som $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i\}_{i=1}^n \cup \{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i\}_{1 \leq i < j \leq n}$. Operatoren L är noll på de första n basvektorerna och på de tvådimensionella delrummen som spänns upp av $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i\}$ ges matrisen för L av

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

som har rang 1. Alltså har bildrummet dimension $n(n-1)/2$.

- (b) Vi kan bilda den linjära operatoren $L : V \otimes V \otimes V \longrightarrow V \otimes V \otimes V$ som ges av den trilinear avbildningen $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 2\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$. Bildrummet $\text{im}(L)$ är det linjära höljet till Y . Vi kan skriva en bas för $V \otimes V \otimes V$ som

$$\begin{aligned} &\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i\}_{i=1}^n \cup \{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i\}_{1 \leq i \neq j \leq n} \\ &\cup \{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}_{1 \leq i < j < k \leq n} \\ &\cup \{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i\}_{1 \leq i < j < k \leq n} \end{aligned}$$

På de första n basvektorerna är L noll. På de tredimensionella delrummen har L matris

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

som har rang 2. Alltså är dimensionen av W

$$\dim W = 2n(n-1) + 2\binom{n}{3} + 2\binom{n}{3} = 4\binom{n}{2} + 4\binom{n}{3} = 4\binom{n+1}{3} = \frac{2(n+1)n(n-1)}{3}.$$

Svar.

- (a) $\dim U = n(n-1)/2$.
 (b) $\dim W = 2(n+1)n(n-1)/3$.