

Lösningar till Tentamen i Modern Fysik (SH1012/SH1013)
08.00-13.00, 2015-08-21, KTH, Stockholm

1. Här nedan listas ett antal elektronkonfigurationer. De kan beskriva atomer i grundtillståndet eller i exciterade tillstånd. Samtliga atomer är laddningsneutrala.

- (a) $1s^2 2s^1$
- (b) $1s^2 2s^2 3s^1$
- (c) $1s^2 2s^2 2p^1$
- (d) $1s^2 2s^2 2p^4$
- (e) $1s^2 2s^2 2p^6 2d^2$
- (f) $1s^2 2s^2 2p^5 4d^1$

- Vilken/vilka konfiguration(er) är felaktiga/otillåtna? [1 p]
- Vilken/vilka konfiguration(er) motsvarar en atom i ett grundtillstånd? [2 p]
- Ange vilka grundämnen som (de tillåtna) konfigurationerna motsvarar. [2 p]

Lösning:

- Konfiguration (e) är otillåten. Det finns inga $2d$ -tillstånd eftersom d motsvarar $l = 2$ och det gäller alltid att $l < n$ (vi har här $n = 2$).
- (a), (c) och (d) motsvarar grundtillstånd.
- Vi räknar/adderar antalet elektroner och vi vet att detta motsvarar antal protoner ($=Z$ =atomtalet) för neutrala atomer.
För (a) har vi $Z = 3$ dvs litium (Li).
För (b) har vi $Z = 5$ dvs bor (B) i ett exciterat tillstånd (elektronhål i $2p$)
För (c) har vi $Z = 5$ dvs bor (B)
För (d) har vi $Z = 8$ dvs syre (O).
För (f) har vi $Z = 10$ dvs neon (Ne) i ett exciterat tillstånd. (hål i ett antal orbitaler med $n = 2, 3, 4$)

2. I ett studentlab (x, y -planet) används två små gammadetektorer med mycket god energiupplösning. Vid $x = y = 0$ [m] är en radioaktiv källa placerad, den sänder ut gammafotoner med energin 662 keV. Källan är kollimerad så att fotonerna endast emitteras ut längs med den positiva x -axeln. Detektor 1 är placerad i $y = 0, x = 1$ [m], och detektor 2 i $y = 1, x = 1$ [m]. Ett experiment utförs nu för att studera vad som händer då en gammafoton Comptonsprids (och lämnar en del av sin energi) i detektor 1 och sedan träffar detektor 2 där den växelverkar med fotoelektrisk effekt (och därmed lämnar all sin resterande energi). Vilka energier (i keV) uppmäter vi i detektor 1 respektive detektor 2? [2 p].

Detektor 2 flyttas nu runt i alla möjliga vinklar (utom rakt på x -axeln) och experimentet upprepas för många vinklar och de olika energierna noteras. Avståndet mellan de två detektorerna hålls konstant. Vi kan kalla energin som uppmäts i detektor 1 för E_1 och energin i detektor 2 för E_2 . Om dessa energi-par plottas som punkter i en graf (E_1 och E_2 på vinkelräta axlar), vilken kurvform får vi av alla punkterna tillsammans? Rita en bild! [3 p].

Lösning:

Vi betraktar detektorerna som punktformiga och använder oss av formeln för Comptonspridning:

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1 - \cos\theta}{m_e c^2}.$$

Vi vet att den inkommande fotonenergin, E , är 662 keV, att $m_e c^2 = 511$ keV, och att vinkeln, θ i 1:a deluppgiften är 90° , dvs att $\cos\theta = 0$:

$$\frac{1}{E'[\text{keV}]} - \frac{1}{662} = \frac{1-0}{511} = \frac{1}{511}$$

$$E' = \frac{1}{\frac{1}{662} + \frac{1}{511}} = 288.4 [\text{keV}].$$

Vi detekterar alltså en signal med ca 288 keV i detektor 2 (som genom foto-effekt absorberar energin E'). Detektor 1 detekterar energin som den spridda elektronen har, dvs: $662-288=374$ keV.

För den 2:a deluppgiften så noterar vi att summan för de två detektorernas energisignaler alltid kommer att vara 662 keV. Det betyder att olika värden på vinkeln, θ , motsvarar olika punkter *på en rät linje*, som går i 45° vinkel i E_1/E_2 -diagrammet. Linjens riktning är från $(E_1 = 0, E_2 = 662 \text{ keV})$ till $(E_1 = 662, E_2 = 0 \text{ keV})$, men linjen går inte hela vägen ut i kanten till 662 keV (det maximala värdet på E_1 är lägre än 662 keV pga rörelsemängdens bevarande).

3. En partikel med massan m befinner sig i en endimensionell potential, $U(x)$. Partikelns vågfunktion kan skrivas:

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} (2\alpha x^2 - 1) e^{-\alpha x^2/2},$$

där $\alpha = m\omega/\hbar$. Ta fram funktionen $U(x)$, uttryckt i m, ω , och x , samt beräkna partikelns energi, E . [5 p]

Lösning:

Vi ställer upp Schrödingerekvationen i en dimension:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E \cdot \psi(x).$$

Derivering av $\psi(x)$ ger:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(x)}{dx} &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(4\alpha x) e^{-\alpha x^2/2} + (2\alpha x^2 - 1) e^{-\alpha x^2/2} (-\alpha x) \right] = \\ &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{-\alpha x^2/2}}{\sqrt{2}} (5\alpha x - 2\alpha^2 x^3) \\ \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(-\alpha x) e^{-\alpha x^2/2} (5\alpha x - 2\alpha^2 x^3) + e^{-\alpha x^2/2} (5\alpha - 6\alpha^2 x^2) \right] = \\ &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{-\alpha x^2/2}}{\sqrt{2}} (-11\alpha^2 x^2 + 2\alpha^3 x^4 + 5\alpha) \end{aligned}$$

Alla tre termerna i Schrödingerekvationen har den gemensamma faktorn $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{-\alpha x^2/2}}{\sqrt{2}}$, så vi kan förkorta bort den och skriva:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (-11\alpha^2 x^2 + 2\alpha^3 x^4 + 5\alpha) + U(x)(2\alpha x^2 - 1) = E \cdot (2\alpha x^2 - 1).$$

Vi vet att $U(x)$ beror av x . De termer som inte beror av x ger oss nu:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} (5\alpha) &= -E \\ E &= \frac{5\alpha\hbar^2}{2m} = [\alpha = m\omega/\hbar] = \frac{5\omega\hbar}{2} \end{aligned}$$

Detta kan skrivas som $E = (2 + \frac{1}{2})\hbar\omega$, så vi kan notera att energin är densamma som det 2:a exciterade tillståndet för den harmoniska oscillatorn i en dimension. Med denna energi insatt i Schrödingerekvationen så har vi nu:

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m}(-11\alpha^2x^2 + 2\alpha^3x^4 + 5\alpha) + U(x)(2\alpha x^2 - 1) &= \frac{5\alpha\hbar^2}{2m} \cdot (2\alpha x^2 - 1) \\ -\frac{\hbar^2}{2m}(-11\alpha^2x^2 + 2\alpha^3x^4 + 5\alpha) + U(x)(2\alpha x^2 - 1) &= \frac{\hbar^2}{2m} \cdot (10\alpha^2x^2 - 5\alpha)\end{aligned}$$

Vi ser att formen på $U(x)$ måste innehålla faktorn $\hbar^2/2m$ och att en faktor x^2 är nödvändig för att få ordning på x^4 -termerna. Vi ansätter tills vidare $U(x) = z \cdot (\hbar^2/2m)x^2$, med konstanten z :

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m}(-11\alpha^2x^2 + 2\alpha^3x^4 + 5\alpha) + z \cdot \frac{\hbar^2}{2m}x^2(2\alpha x^2 - 1) &= \frac{\hbar^2}{2m} \cdot (10\alpha^2x^2 - 5\alpha) \\ -(-11\alpha^2x^2 + 2\alpha^3x^4 + 5\alpha) + z \cdot x^2(2\alpha x^2 - 1) &= (10\alpha^2x^2 - 5\alpha) \\ 11\alpha^2x^2 - 2\alpha^3x^4 + 2z\alpha x^4 - zx^2 &= 10\alpha^2x^2 \\ \alpha^2x^2 - 2\alpha^3x^4 + 2z\alpha x^4 - zx^2 &= 0 \\ (\alpha^2x^2 - 2\alpha^3x^4) &= z(x^2 - 2\alpha x^4) \\ z &= \alpha^2.\end{aligned}$$

Vi får således lösningen $U(x) = \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} \cdot \frac{\hbar^2}{2m}x^2 = \frac{m\omega^2}{2}x^2$ för potentialen, dvs den harmoniska oscillatorpotentialen.

En elegantare lösning är att efter deriveringen notera att vi kan skriva:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = (\alpha^2x^2 - 5\alpha)\psi(x).$$

I Schrödingerekvationen kan då $\psi(x)$ förkortas bort och vi får följande ekvation:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\alpha^2x^2 - 5\alpha) + U(x) = E.$$

Man kan då enkelt identifiera energin som konstanttermen: $E = \frac{5\alpha\hbar^2}{2m} = \frac{5\omega\hbar}{2}$ och potentialen som den x^2 -beroende termen: $U(x) = \frac{\hbar^2\alpha^2x^2}{2m} = \frac{m\omega^2}{2}x^2$.

4. En väteatom befinner sig i ett tillstånd med $n = 2$ och $l = 1$. Hur många olika sådana tillstånd är möjliga [1 p]?

Välj ett av dessa tillstånd (ange noga vilket) och hitta det/de θ där vi har störst sannolikhet att hitta partikeln [4 p].

Lösning:

Vi har följande möjliga tillstånd med kvanttalen (n, l, m_l, m_s) :

$(2, 1, -1, -\frac{1}{2})$; $(2, 1, -1, \frac{1}{2})$; $(2, 1, 0, -\frac{1}{2})$; $(2, 1, 0, \frac{1}{2})$; $(2, 1, 1, -\frac{1}{2})$; $(2, 1, 1, \frac{1}{2})$.

Dvs sex olika tillstånd är möjliga.

För 2:a deluppgiften så väljer jag här tillståndet $(n, l, m_l, m_s) = (2, 1, 0, \frac{1}{2})$ och ser från formelsamlingen att vågfunktionens θ -beroende del, samt den tillhörande θ -beroendekan sannolikheten skrivas på följande sätt:

$$\begin{aligned}Y_l^{m_l} &= Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta. \\ P(\theta) &= |Y_1^0|^2 = \frac{3}{4\pi}\cos^2\theta.\end{aligned}$$

Om vi deriverar denna funktion ($\frac{d}{d\theta}(\cos^2\theta) = -2\cos\theta\sin\theta$) och letar 0-ställen så finner vi $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Från 2:a-derivatan ($\frac{d^2}{d\theta^2}(\cos^2\theta) = 2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$) så ser

vi att $2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 2$ (maximum) för $\theta = 0, \pi$. Vi ser också att $2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 2$ (minimum) för $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Således har sannolikstätheten (i θ -led) sitt maximum i riktningarna $\theta = 0, \pi$.

Om man vill veta i vilken riktning $(\theta, d\theta)$ som det är störst sannolikhet att hitta elektronen så bör man dock skriva $S(\theta) = P(\theta)dV$ och sedan integrera över alla r med volymselementet $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$. Detta ger $S(\theta)$ formen $\cos^2\theta \cdot \sin\theta$. Derivering och 2:a-derivering visar sedan att maxima ligger vid ca $\theta = 35^\circ$ och $\theta = 145^\circ$.

Lösningar för de andra möjliga tillstånden fås på motsvarande sätt med samma metod.

5. Atomkärnan ^{90}Sr sönderfaller med β^- -sönderfall. Beskriv hur β^- -sönderfallet går till; inkludera relevanta partiklar före och efter sönderfallet (kvarkar behöver inte introduceras i detta fall), samt vilken dotterkärna som bildas. [2 p]

I en enkel modell för betasönderfall har fysikern Bart (felaktigt) antagit att en elektron befinner sig inuti atomkärnan före sönderfallet och sedan flyger ut från kärnan. Bart tänker sig att elektronernas maximala energi borde kunna uppskattas med hjälp av Heisenbergs osäkerhetsrelation eftersom både atomkärnans storlek och elektronens massa är kända. Använd denna modell och uppskatta de emitterade elektronernas maximala *kinetiska* energi för fallet ^{90}Sr ovan. [3 p]

Lösning:

För 1:a deluppgiften hänvisas till kursboken för beskrivning av β^- -sönderfallet i allmänhet. Antalet protoner i kärnan ökar med 1 och antal neutroner i kärnan minskar med 1. Masstalet bevaras därför. Dessutom skickas en elektron samt en antineutrino ut från kärnan. elektronerna har ett kontinuerligt energispektrum upp till Q_{β^-} -värdet. Dotterkärnan som bildas då ^{90}Sr sönderfaller med β^- är ^{90}Y vilket inses av att Y har atomtalet ovanför Sr och att masstalet (=90) bevaras.

För 2:a deluppgiften ska vi använda Heisenbergs osäkerhetsrelation för att uppskatta den maximala energin för elektronen i sönderfallet ovan. Om vi använder sambandet $\Delta X \Delta p_x = \hbar/2$ så kan vi använda atomkärnans diameter som ΔX . Vi har masstalet $A = 90$ så vi skriver:

$$\Delta X = 2R = 2R_0 \cdot A^{1/3} 10^{-15} = 2 \cdot 1.2 \cdot 90^{1/3} 10^{-15} = 10.8 \cdot 10^{-15} [\text{m}].$$

Vi kan nu uppskatta osäkerheten i rörelsemängden, p_x :

$$\Delta p_x = \frac{\hbar/2}{\Delta x} = \dots = 9.1 [\text{MeV}/c].$$

Här har vi använt enheten MeV/c eftersom det ger bekväma räkningar i nästa steg. Om osäkerheten i rörelsemängden är så stor så förväntar vi oss således att den maximala rörelsemängden är av storleksordningen 9.1 MeV/c. Vi måste nu använda relativistiska samband för att beräkna elektronens maximala kinetiska energi, E_k . Med elektronens vilomassa $m_0 = 0.511 [\text{MeV}/c^2]$ så får vi:

$$\begin{aligned} E_k &= E - E_0 = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2} - m_0c^2 = \sqrt{(9.14)^2 + (0.511)^2} - 0.511 = \\ &= 8.6 [\text{MeV}]. \end{aligned}$$

Denna energi är avsevärt större än typiska beta-energier i detta område (de ligger på ca 1 MeV). Detta resultat säger oss Barts modell inte fungerar. Man har sedan länge övergivit teorier där elektronen existerar i kärnan före sönderfallet.

6. En astronom, Alex, på Jorden som studerar stjärnsystemet Alfa Centauri (4.37 ljusår bort) ser en rymdfarkost passera Alfa Centauri. Farkosten rör sig rakt mot oss och Alex kan uppmäta hastigheten till $0.55 c$ relativt Jorden. Ljuset från händelsen/passagen når Jorden den 21:a augusti 2015.

Efter förhandlingar i FN bestämmer man att det ska skickas ut en raket för att möta den främmande farkosten och se om den har fredliga avsikter. En rymdraket (med astronauten Ellen) skickas ut från Jorden den 1:a september 2015 med hastigheten $0.45c$ relativt Jorden, rakt mot den främmande farkosten.

I farkosten sitter den främmande livsformen XLsyf och noterar efter en tid raket som kommer från Jorden. Med vilken hastighet tycks den (för XLsyf) närma sig? [2 p].

När Ellen och XLsyf möts i rymden så hälsar de artigt och det visar sig att XLsyf är mycket sympatisk och endast på jakt efter bränsle. Ellen skickar omedelbart ett meddelande (med radiovågor) till Jorden och meddelar dessa nyheter. När (årtal? månad?) mottags detta meddelandet på Jorden? [3 p].

Lösning:

För 1:a deluppgiften så kan vi använda gängse hastighetstransformationer för relativistiska hastigheter. Alla rörelser sker längs en tänkt x -koordinat med origo på Jorden. Från Jorden sett så har vi då två hastigheter: $v = -0.55c$ (XLsyf:s hastighet) och $u_x = 0.45c$ (Ellens hastighet). Vi vill veta värdet på u'_x , dvs den hastighet som XLsyf upplever att Ellen har. Vi utgår från formelsamlingens formel för hastighetstransformation och inverterar den för att få uttrycket för u'_x :

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x} \\ u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} = \left[\frac{0.45 - (-0.55)}{1 - (-0.55) \cdot 0.45} \right] \cdot c = 0.80c. \end{aligned}$$

XLsyf upplever alltså att Ellen närmar sig med 80% av ljusets hastighet.

För 2:a deluppgiften så får vi först fundera på valet av koordinatsystem. Eftersom start- och stoptiderna mäts i Jordens system så väljer vi att använda Jorden som systemet S och utgår därifrån. Samtliga tider, avstånd, och hastigheter nedan är uttryckta i Jordens system. Problemet blir då enkelt eftersom både XLsyf:s (v) och Ellens (u_x) hastigheter redan är kända i Jordens inertialsystem. De är ju $v = -0.55c$ respektive $u_x = 0.45c$. Vid tiden $t = 0$ så är XLsyf på avståndet $x_0 = 4.37$ ljusår och ljuset från denna passage börjar röra sig mot Jorden i ljushastigheten, c . Händelsen uppfattas av astronomen på Jorden vid tiden t_1 (21:a augusti 2015). Vid denna tid befinner sig XLsyf på avståndet x_1 från Jorden. Elva dagar senare (vid tiden t_2) så kan vi beräkna XLsyf:s position, x_2 :

$$\begin{aligned} x_2 &= x_0 + vt_2 = x_0 + v \left[4.37[y] + \frac{11}{365.25}[y] \right] = \\ &= 4.37[y] - 0.55c \left[4.37[y] + \frac{11}{365.25}[y] \right] = \\ &= 1.95 [y], \end{aligned}$$

om vi använder enheten $[y]$ för tiden och ljusår ($[ly]$) för avstånden. Vi ser samtidigt att tiden t_2 är lika med $4.37 + 11/365.25 = 4.40$ år.

De två rymdfararna möts vid tiden t_3 på avståndet x_3 (från Jorden, i Jordens system). Vid tiden t_4 mottags meddelandet på Jorden. För att bestämma $t_3 - t_2$ och därur x_3 så ställer vi upp en ekvationen med XLsyf i vänsterledet och Ellen i högerledet och löser ut x_3 :

$$\begin{aligned} x_2 + v \cdot (t_3 - t_2) &= 0 + u_x \cdot (t_3 - t_2) \\ (t_3 - t_2) &= \frac{x_2}{u_x - v} \\ x_3 &= (t_3 - t_2)u_x = \frac{x_2 u_x}{u_x - v} = \frac{x_2 \cdot 0.45c}{0.45c - (-0.55c)} = 0.45 \cdot x_2 \end{aligned}$$

Vi kan nu räkna ut tiden $t_4 - t_2$ genom att lägga till tiden som det tar för radiovågorna (som rör sig med hastigheten c) att röra sig från x_3 till Jorden:

$$\begin{aligned} t_4 - t_2 &= (t_3 - t_2) + \frac{x_3}{c} = x_2 \left(\frac{1}{u_x - v} + \frac{0.45}{c} \right) = \\ &= \frac{x_2}{c} \left(\frac{1}{u_x/c - v/c} + 0.45 \right) = \frac{x_2}{c} \left(\frac{1}{0.45 - (-0.55)} + 0.45 \right) = 1.45 \frac{x_2}{c}. \end{aligned}$$

Eftersom $x_2 = 1.95$ ljusår så är $(t_4 - t_2) = 1.45 \cdot 1.95 = 2.83$ år.

vilket är lite mindre än 2 år och 10 månader. Så om vi enligt ovan utgår från att t_2 infaller den 1/9-2015 så ser vi att meddelandet mottags på Jorden i ungefär i slutet av juni 2018.

7. I kärnreaktorer skickas ett mycket stort antal högenergetiska (typiskt 1 – 2 MeV) neutroner ut från bränslestavarna. Vatten omger bränslet och har (förutom som kylmedel) uppgiften att bromsa ner neutronerna till lägre hastigheter. En vanlig process i denna miljö är att en neutron absorberas av en proton (i vattnets väte) och bildar kärnan ^2H , dvs deuterium. Om vi antar att protonen är i vila före reaktionen, vilken är den lägsta neutronenergin där denna reaktion är möjlig? [2 p]

Efter reaktionen skickas en gammafoton i regel ut för energins bevarande. Beräkna energin på denna gammafoton. [3 p]

Lösning:

För 1:a deluppgiften så kan vi från formelsamlingens masstabell se att deuterium har en atommassa av 2.014101 [u]. Dess bindningsenergi, E_B , kan då beräknas sålunda:

$$\begin{aligned} E_B &= [Z \cdot m_{\text{atom}}(^1\text{H}) + N \cdot m_n - m_{\text{atom}}(^2\text{H})] \cdot c^2 = \\ &= [Z \cdot 1.007825 + N \cdot 1.00866501 - 2.014101] \cdot 931.502 \text{ [MeV]} = 2.2 \text{ [MeV]}. \end{aligned}$$

Deuterium är alltså ett bundet system och man vinner således 2.2 MeV på att föra ihop en proton och en neutron. Eftersom neutronen är oladdad så finns inte heller någon Coloumbpotential att övervinna. Neutroner kan således absorberas av protoner för hur låga kinetiska energier som helst (ned till $E_{\text{kin}} = 0$) förutsatt att de kommer tillräckligt nära protonerna. Detta är också vad man ser i kärnreaktorer; s.k. *termiska*, mycket lågenergetiska, neutroner absorberas i stor mängd av vattnets protoner.

För 2:a deluppgiften så noterar vi enligt ovan att gammafotonens energi måste överensstämma med bindningsenergin eftersom ingen bindningsenergi finns före absorptionen. (Rekylenergin för deuteriumkärnan är dessutom försumbar vilket lätt kan visas.) Gammafotonens energi är alltså 2.2 MeV.

8. I vätemolekylen, H_2 , så befinner sig de två protonerna på ett avstånd av 0.074 nm från varandra. Molekylen kan exciteras genom rotation. Beräkna först energin (i eV) för de tre första (rotations)exciterade energinivåerna [4 p].

Bestäm våglängden (i nm) hos de fotoner som emitteras vid övergången $J = 3 \rightarrow J = 2$, där J är rotationskvanttalet. [1 p]

Lösning:

Vi kan använda sambandet för molekylers rotationsenergi:

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1), \quad J = 0, 1, 2, \dots$$

Eftersom tyngdpunkten ligger mitt emellan de två (lika massiva) protonerna så kan vi använda tyngdpunkten som origo och skriva upp rörelsemängdsmomentet såsom:

$I = m_p x^2 + m_p x^2 = 2m_p x^2$, där x är avståndet från tyngdpunkten till en proton.
Från uppgiften har vi: $2x = 0.074 \cdot 10^{-9} \text{ [m]}$, så vi kan nu räkna ut faktorn $\hbar^2/2I$:

$$\begin{aligned}\frac{\hbar^2}{2I} &= \frac{h}{4\pi^2 \cdot 4m_p x^2} = \frac{h^2}{4\pi^2 m_p (2x)^2} = \frac{(4.1357 \cdot 10^{-15})^2 \text{ [eV}^2 \cdot \text{s}^2] \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \text{ [m}^2/\text{s}^2]}{4\pi^2 \cdot 938.28 \cdot 10^6 \text{ [eV]} \cdot (0.074 \cdot 10^{-9})^2 \text{ [m}^2]} = \\ &= \frac{4.1357^2 \cdot 9 \cdot 10^{-2} \text{ [eV]}}{4\pi^2 \cdot 938.28 \cdot 0.074^2} = 0.0076 \text{ [eV]}.\end{aligned}$$

Ovanför grundtillståndet ($J = 0$) så har vi nu för de tre första exciterade tillstånden:

$$\begin{aligned}E_1 &= 0.0076 \cdot 1(1+1) = 0.0076 \cdot 2 = 0.015 \text{ [eV]}, \\ E_2 &= 0.0076 \cdot 2(2+1) = 0.0076 \cdot 6 = 0.046 \text{ [eV]}, \\ E_3 &= 0.0076 \cdot 3(3+1) = 0.0076 \cdot 12 = 0.091 \text{ [eV]}.\end{aligned}$$

För 2:a deluppgiften så noterar vi att energiskillnaden för övergången som efterfrågas är $E_3 - E_2 = 0.046 \text{ [eV]}$. Detta blir således fotonens energi, E . Våglängden beräknas sålunda:

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{4.1357 \cdot 10^{-15} \text{ [eV} \cdot \text{s]} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]}}{0.046 \text{ [eV]}} = 2.7 \cdot 10^{-5} \text{ [m]} = 27 \text{ [\mu m]}.$$