



SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
17 april 2019

Skrivtid: 14:00-19:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Grundläggande problem	7	8	8	8	8	8
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	0	0	3	6	9	12

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet av polynom med komplexa koefficienter. Definiera $L: V \rightarrow V$ genom $L(p(x)) = p(x+1) + p(x-1)$ för alla $p(x) \in V$. Visa att L är linjär och bestäm en bas för kärnan $\ker(L)$ och en bas för bildrummet $\text{im}(L)$. **(4 p)**

2. Låt

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

- (a) Avgör vilka av matriserna i S som är Hermiteska och bestäm egenvärdena för någon av dessa. **(2 p)**
- (b) Avgör vilka av matriserna i S som är unitära och bestäm egenvärdena för någon av dessa. **(2 p)**

3. Bestäm det största singularvärdet och motsvarande höger- och vänstersingulära vektorer som hör till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. (a) Definiera begreppet *inre direkt summa av delrum*. (1 p)
(b) Visa att om W är ett delrum av V så finns ett delrum U så att $U \oplus W = V$ som en inre direkt summa i fallet då $\dim V < \infty$. (1 p)
(c) Visa att om $V = U \oplus W$ som inre direkt summa av delrum så är $V/U \cong W$. (2 p)
5. (a) Ge definitionen av en *inre produkt* på ett komplext vektorrum. (1 p)
(b) Vad är det som gör att $C^0([0, 1], \mathbb{C})$, rummet av kontinuerliga komplexvärda funktioner på enhetsintervallet, med den inre produkten som ges av $\langle f|g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t) dt$ inte är ett Hilbertrum? (1 p)
(c) Bevisa att en inre produkt på ett komplext vektorrum är unikt bestämd av normen. (2 p)

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt $L: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ vara den linjära avbildning som ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

med avseende på standardbasen. Visa att $\cos(tL)$ är en väldefinierad operator på $\mathbb{C}^2$ för alla komplexa tal t och bestäm matrisen för denna operator med avseende på standardbasen. (4 p)

7. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ och definiera $L: V \rightarrow V$ genom

$$L(p(x)) = p(x) + p(\xi x) + p(\xi^2 x), \quad \forall p(x) \in V,$$

där $\xi = e^{2i\pi/3}$. Visa att L har två egenvärden λ_1 och λ_2 så att $V = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$. (4 p)

8. Bestäm A^{2019} då

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

har koefficienter i $\mathbb{Z}_7$. (4 p)

9. Bestäm alla unitära stokastiska matriser (sannolikhetsmatriser) och avgör om de bildar en grupp under matrismultiplikation. (4 p)