



SF1672 Linjär algebra
Tentamen
10 Januari 2020

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de fem första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del I. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	20	Grundläggande problem	15	16	16	16	16	16
II	12	Avancerade problem	0	0	2	4	6	8

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildningen som ges av

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \text{för alla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Bestäm en matris A sådan att $T^{-1}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. (4 p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 4 & 3 & 29 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas till nollrummet $\text{Nul}A$ och en bas till radrummet $\text{Row}A$. (4 p)

3. Givet matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en ortogonal matris P och en diagonalmatris D sådan att $D = P^T A P$. (4 p)

4. Låt

$$H_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}$$

och

$$H_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 9\}$$

vara två parallella plan i $\mathbb{R}^3$. Bestäm avståndet mellan H_1 och H_2 .

(4 p)

5. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en minstakvadratlösning till matrisekvationen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt n vara ett naturligt tal och

$$V_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T = -A\}.$$

(a) Visa att V_n är ett delrum av vektorrummet $\mathbb{R}^{n \times n}$ av $n \times n$ -matriser.

(2 p)

(b) Bestäm en bas för V_n .

(2 p)

7. Låt

$$\mathbb{P}_3 = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 3. Låt $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ vara den linjära avbildning som definieras genom

$$T(p(t)) = (t+1)p'(t)$$

för alla polynom $p(t) \in \mathbb{P}_3$. Bestäm en bas $\mathcal{B}$ för $\mathbb{P}_3$ sådan att $\mathcal{B}$ -matrisen $[T]_{\mathcal{B}}$ är en diagonalmatrix.

(4 p)

8. Låt n vara ett naturligt tal och låt $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ vara $n-1$ vektorer. Låt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vara definierad genom

$$x_i = \det [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_{n-1} \quad \mathbf{e}_i] \quad \text{för } i = 1, 2, \dots, n,$$

där $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ betecknar standardenhetsvektorerna i $\mathbb{R}^n$.

(a) Visa att $\det [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_{n-1} \quad \mathbf{x}] = \|\mathbf{x}\|^2$.

(2 p)

(b) Visa att $\mathbf{x} \in (\text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}\})^\perp$.

(2 p)