



SF1673 Analys i en variabel
Tentamen
den 21 december 2023

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Danijela Damjanović

Tentamen består av åtta uppgifter uppdelade i två delar. Del I utgörs av de fem första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Varje uppgift ger maximalt fyra poäng. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift ger maximalt sex poäng. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del I. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	20	Grundläggande problem	15	16	16	16	16	16
II	18	Avancerade problem	0	0	4	8	11	14

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är välpresenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är välmotiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Taylor serien kring 0 av funktionen $f(x) = \int_0^x \ln(1+t)dt$ är $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$.
Beräkna a_0 , a_1 , a_2 och a_3 . (4 p)

2. Låt

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x-1} & x > 1 \\ b, & x = 1 \\ \frac{a(x^3-1)}{x^2-1}, & x < 1 \end{cases}$$

- (a) Bestäm konstanten a och konstanten b så att funktionen f blir kontinuerlig. (2 p)

- (b) Undersök konvergens/divergens av $\int_0^\infty f(x)dx$. (2 p)

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 4y = \sin x$ för vilken $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$. **(4 p)**
4. Låt $f(x) = x^3 - x^2 - |x|$ för $-1 \leq x \leq 2$.
(a) Bestäm de intervall där f är växande eller avtagande samt eventuella lokala max/min punkter för f . Är f deriverbar? Motivera ditt svar. **(2 p)**
(b) Bestäm de intervall där f är konvex/konkav och skissa noggrant grafen av f . **(2 p)**
5. Bestäm den största möjliga volymen V av en cylinder sådan att sammanlagda arean A av cylinderns sidoytor är given. **(4 p)**
-

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. (a) Definera vad som menas med att funktionen f är (Riemann) integrerbar på $[a, b]$.
(Dvs definera integralen av f på $[a, b]$). **(2 p)**
(b) Låt $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vara strängt växande. Stämmer det att f är integrerbar på $[a, b]$?
Motivera ditt svar. **(2 p)**
(c) Visa att $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$ är en Riemannsumma till $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Använd detta
för att beräkna $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. **(2 p)**
7. (a) Formulera satsen om mellanliggande värde. Ge ett exempel på en funktion som inte
uppfyller satsen. **(2 p)**
(b) Visa att ekvationen $e^x = x + 2$ har minst en lösning i intervallet $[0, 2]$. **(1 p)**
(c) Visa att varje polynom av udda grad har minst ett reelt nollställe. **(3 p)**
8. Bestäm om följande påståenden är sanna eller falska. Motivera ditt svar (dvs visa påståen-
den om de är sanna och ge motexempel om de är falska).
(a) För varje positiv talföljd (a_n) (dvs $a_n > 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$), serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent
om och endast om följderna av delsummor är uppåt begränsad. **(3 p)**
(b) För varje positiv talföljd (a_n) , serien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ är konvergent om och endast om
 (a_n) konvergerar mot noll. **(3 p)**
-