

TENTAMEN TEORETISK FYSIK SI1155

Tisdag 2025-08-12 kl 08:00-13:00

Skriv på varje sida Namn och problemnummer

Motivera noga Otillräckliga motiveringar leder till poängavdrag

Hjälpmedel BETA, miniräknare, linjal, formelblad på skrivningens sida 3-5

Poängsättning 6 poäng per problem

Examinator Mats Wallin tel 073 765 2000

1. En endimensionell harmonisk oscillator är vid tiden $t = 0$ i tillståndet

$$|\Psi(0)\rangle = N(|0\rangle + |1\rangle)$$

där $|n\rangle$ är energiegentillstånd.

- (a) Bestäm värdet på normeringskonstanten N .
- (b) Bestäm möjliga mätvärden på energin och sannolikheten att få dessa värden.
- (c) Beräkna $\langle x(t) \rangle$ och $\langle p(t) \rangle$ vid tiden t .

2. En elektron passerar en Stern-Gerlach apparat som preparerar $S_z = +\hbar/2$ vid tiden $t = 0$. Elektronen färdas sedan under tiden t i ett likformigt konstant magnetfält B orienterat i x-riktningen.

- (a) Bestäm möjliga värden av en mätning av S_x och sannolikheten att dessa värden fås vid tiden t .
- (b) Bestäm möjliga värden av en mätning av S_z och sannolikheten att dessa värden fås vid tiden t .

3. En partikel med massa m rör sig i tre dimensioner inne i en ihålig sfär med radie R .

- (a) Bestäm grundtillståndsvågfunktionen och grundtillståndsenergin.

Ledning: Inför $u = r\Psi$.

- (b) Beräkna trycket $P = -\partial E / \partial V$ i grundtillståndet från partikeln på sfärytan.

VÄND!

4. Bestäm alla bundna tillstånd till den endimensionella potentialen

$$V(x) = W(x) - \alpha\delta(x)$$

där $\alpha > 0$ är en konstant och W är en stegpotential som ges av

$$W(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x \geq 0 \end{cases}$$

där $V_0 > 0$ är en konstant. Tillstånden behöver inte normeras.

5. (a) Propagatorn för en partikel som rör sig i en dimension definieras

$$K(x, x_0; t - t_0) = \langle x | e^{-i(t-t_0)H/\hbar} | x_0 \rangle$$

och ger sannolikhetsamplituden att hitta partikeln i x vid tiden t om den är i x_0 vid initialtiden t_0 . Beräkna $K(x, x_0; t - t_0)$ för en fri partikel.

Ledning: Använd fullständighetsrelationen för rörelsemängdsegenfunktionerna.

(b) Visa att svaret i (a) är proportionellt mot e^{cS} där c är en konstant och

$$S = \int_{t_0}^t L dt'$$

är den klassiska verkansintegralen för en fri partikel som startar från x_0 vid tiden t_0 och slutar i x vid tiden t och $L = T - V$ är Lagrangefunktionen.

LYCKA TILL!

LÖSNINGAR

1. En endimensionell harmonisk oscillator är vid tiden $t = 0$ i tillståndet

$$|\Psi(0)\rangle = N(|0\rangle + |1\rangle)$$

där $|n\rangle$ är energiegentillstånd.

(a) Bestäm värdet på normeringskonstanten N .

(b) Bestäm möjliga mätvärden på energin och sannolikheten att få dessa värden.

(c) Beräkna $\langle x(t) \rangle$ och $\langle p(t) \rangle$ vid tiden t .

(a) Normera tillståndet:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = |N|^2 (\langle 0 | 0 \rangle + \langle 1 | 1 \rangle) = 2|N|^2 = 1$$

Välj $N = 1/\sqrt{2}$.

(b) Tillståndet kan skrivas

$$|\Psi(0)\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$$

där $c_0 = c_1 = 1/\sqrt{2}$. Energins väntevärde blir

$$\langle E \rangle = E_0|c_0|^2 + E_1|c_1|^2$$

Måjligen mätvärden är $E_0 = \hbar\omega/2$ och $E_1 = 3\hbar\omega/2$. Sannolikheterna ges av $P_n = |c_n|^2$ och blir $P_0 = P_1 = 1/2$

(c) Tillståndet vid tiden t är

$$|\Psi(t)\rangle = c_0|0\rangle e^{-i\omega_0 t} + c_1|1\rangle e^{-i\omega_1 t}$$

där $\hbar\omega_n = E_n$ är energiegenvärdena. Använd stegoperatorerna:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a), \quad p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^\dagger - a)$$

Väntevärdena blir

$$\langle x(t) \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (c_0^* \langle 0 | e^{+i\omega_0 t} + c_1^* \langle 1 | e^{+i\omega_1 t}) (a^\dagger + a) (c_0 | 0 \rangle e^{-i\omega_0 t} + c_1 | 1 \rangle e^{-i\omega_1 t})$$

Mha $\langle n | a | n \rangle = 0$, $\langle n | a^\dagger | n \rangle = 0$, $\langle 0 | a | 1 \rangle = 1$, $\langle 1 | a^\dagger | 0 \rangle = 1$, $\omega_1 - \omega_0 = \omega$ blir

$$\langle x(t) \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{1}{2} (e^{+i(\omega_1 - \omega_0)t} \langle 1 | a^\dagger | 0 \rangle + e^{-i(\omega_1 - \omega_0)t} \langle 0 | a | 1 \rangle) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cos(\omega t)$$

$$\langle p(t) \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} \frac{1}{2} \left(e^{+i(\omega_1 - \omega_0)t} \langle 1|a^\dagger|0 \rangle - e^{-i(\omega_1 - \omega_0)t} \langle 0|a|1 \rangle \right) = -\sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} \sin(\omega t)$$

Kontroll: Ehrenfests theorem ger

$$\langle p(t) \rangle = m \frac{d\langle x(t) \rangle}{dt} = m\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (-\omega) \sin(\omega t) = -\sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} \sin(\omega t)$$

OK.

2. En elektron passerar en Stern-Gerlach apparat som preparerar $S_z = +\hbar/2$ vid tiden $t = 0$. Elektronen färdas sedan under tiden t i ett likformigt konstant magnetfält B orienterat i x-riktningen.

(a) Bestäm möjliga värden av en mätning av S_x och sannolikheten att dessa värden fås vid tiden t .

(b) Bestäm möjliga värden av en mätning av S_z och sannolikheten att dessa värden fås vid tiden t .

Hamiltonoperatoren är $H = \frac{e}{m}BS_x$. Bestäm tillståndet vid tiden t mha tidsutvecklingen hos de stationära tillstånden dvs energiegentillstånden $|\pm x\rangle$. Mha

$$|+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

blir

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+x\rangle + |-x\rangle)$$

Detta ger

$$\begin{aligned} \chi(t) &= c_+|+x\rangle + c_-|-x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+x\rangle e^{-i(eB/2m)t} + |-x\rangle e^{+i(eB/2m)t}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i(eB/2m)t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{+i(eB/2m)t} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(eB/2m)t \\ -i \sin(eB/2m)t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(a) Vid tiden t är sannolikheten att mäta $S_x = +\frac{\hbar}{2}$ tidsberoende och ges av $|c_+|^2 = 1/2$. Sannolikheten att mäta $S_x = -\frac{\hbar}{2}$ blir $|c_-|^2 = 1/2$.

(b) Sannolikheten att mäta $S_z = +\frac{\hbar}{2}$ vid tiden t blir

$$|\langle +z|\chi(t)\rangle|^2 = \left| (1, 0) \begin{pmatrix} \cos(eB/2m)t \\ -i \sin(eB/2m)t \end{pmatrix} \right|^2 = \cos^2(eB/2m)t$$

Sannolikheten att mäta $S_z = -\frac{\hbar}{2}$ vid tiden t blir

$$|\langle -z|\chi(t)\rangle|^2 = \left| (0, 1) \begin{pmatrix} \cos(eB/2m)t \\ -i \sin(eB/2m)t \end{pmatrix} \right|^2 = \sin^2(eB/2m)t$$

3. En partikel med massa m rör sig i tre dimensioner inne i en ihålig sfär med radie R .

(a) Bestäm grundtillståndsvågfunktionen och grundtillståndsenergin.

Ledning: Inför $u = r\Psi$.

(b) Beräkna trycket $P = -\partial E/\partial V$ i grundtillståndet från partikeln på sfärytan.

Problemet löstes i föreläsningen om tre dimensioner. Använd sfäriska koordinater. Hamiltonoperatoren är

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

där

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \infty & r > R \end{cases}$$

I grundtillståndet är $L^2 = l(l+1)\hbar^2 = 0$ så centrifugaltermen försvinner från problemet. Lösningen är $\Psi = 0$ för $r > R$.

(a) Bestäm grundtillståndet. För $r < R$ blir

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = E\Psi$$

Inför $u = r\Psi$. Detta ger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} = Eu$$

vilket följer av (skriv $' = d/dr$)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d(u/r)}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (ru' - u) = \frac{u''}{r}$$

Detta är problemet med den endimensionella oändliga potentiallådan med lösning

$$u(r) = A \sin kx + B \cos kx$$

Kontinuitetsvillkoren är $u(0) = 0 \Rightarrow B = 0, u(R) = 0 \Rightarrow k_1 = \pi/R$. Grundtillståndsenergin blir

$$E_1 = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mR^2} = \frac{h^2}{8mR^2}$$

Grundtillståndet blir

$$\Psi_1 = N \frac{\sin \pi r/R}{r}$$

Normering:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\Psi|^2 r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi = 4\pi \int_0^R u^2 \, dr = 4\pi |N|^2 \frac{R}{2} = 1$$

Valet $N = 1/\sqrt{2\pi R}$ ger grundtillståndet

$$\Psi_1(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \frac{\sin \pi r / R}{r}$$

(b) Sfärens volym och area: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $A = 4\pi R^2 = dV/dR$. Trycket blir

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = -\frac{\partial E}{\partial R} \underbrace{\frac{dR}{dV}}_{=1/A} = +\frac{h^2}{4mR^3} \frac{1}{4\pi R^2}$$

$$P = \frac{h^2}{16m\pi R^5}$$

Dimensionskontroll:

$$[P] = \left[\frac{F}{A} \right] = \frac{[ma]}{L^2} = \frac{ML/T^2}{L^2} = \frac{M}{LT^2}$$

$$\left[\frac{h^2}{mR^5} \right] = \frac{[xp]^2}{ML^5} = \frac{L^2(ML/T)^2}{ML^5} = \frac{M}{LT^2}$$

OK.

4. Bestäm alla bundna tillstånd till den endimensionella potentialen

$$V(x) = W(x) - \alpha\delta(x)$$

där $\alpha > 0$ är en konstant och W är en stegpotential som ges av

$$W(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x \geq 0 \end{cases}$$

där $V_0 > 0$ är en konstant. Tillstånden behöver inte normeras.

Sök bundna tillstånd med energi $E < 0$. Lösningar till SE med $E < 0$ är

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{k_-x}, & x < 0 \\ Ae^{-k_+x}, & x > 0 \end{cases}$$

där $k_-^2 = 2m(-E)/\hbar^2$, $k_+^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2$. Integralen av SE över $-\epsilon < x < \epsilon$ ger

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi'' dx &= \alpha \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) \psi dx \\ -\frac{\hbar^2}{2m} (-k_+ - k_-) A &= \alpha A \\ \frac{\hbar^2}{2m} (k_+ + k_-) &= \alpha \end{aligned}$$

Definitionerna av k_+ , k_- ger

$$\sqrt{V_0 - E} + \sqrt{-E} = \frac{\sqrt{2m\alpha}}{\hbar}$$

Kvadrera och lös ut E :

$$V_0 - 2E + 2\sqrt{(V_0 - E)(-E)} = \frac{2m\alpha^2}{\hbar^2}$$

$$2\sqrt{(V_0 - E)(-E)} = \frac{2m\alpha^2}{\hbar^2} - V_0 + 2E$$

$$\boxed{E = -\frac{1}{4} \frac{\hbar^2}{2m\alpha^2} \left(\frac{2m\alpha^2}{\hbar^2} - V_0 \right)^2}$$

Bestäm vågtalen:

$$k_-^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(-E) = \frac{1}{4\alpha^2} \left(\frac{2m\alpha^2}{\hbar^2} - V_0 \right)^2$$

$$k_+^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) = \frac{2m}{\hbar^2}V_0 + \frac{1}{4\alpha^2} \left(\frac{2m\alpha^2}{\hbar^2} - V_0 \right)^2 = \frac{1}{4\alpha^2} \left(\frac{2m\alpha^2}{\hbar^2} + V_0 \right)^2$$

Sammanfattningsvis:

$$\boxed{k_{\pm}^2 = \frac{1}{4\alpha^2} \left(\frac{2m\alpha^2}{\hbar^2} \pm V_0 \right)^2}$$

Slutsats: oberoende av värdena på α , V_0 finns precis ett bundet tillstånd.

Kontroll: För $V_0 = 0$ återfås lösningen från föreläsningen:

$$E = -\frac{1}{4} \frac{\hbar^2}{2m\alpha^2} \left(\frac{2m\alpha^2}{\hbar^2} \right)^2 = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

$$k^2 = \frac{1}{4\alpha^2} \left(\frac{2m\alpha^2}{\hbar^2} \right)^2 = \frac{m^2\alpha^2}{\hbar^4}$$

5. (a) Propagatorn för en partikel som rör sig i en dimension definieras

$$K(x, x_0; t - t_0) = \langle x | e^{-i(t-t_0)H/\hbar} | x_0 \rangle$$

och ger sannolikhetsamplituden att hitta partikeln i x vid tiden t om den är i x_0 vid initialtiden t_0 . Beräkna $K(x, x_0; t - t_0)$ för en fri partikel.

Ledning: Använd fullständighetsrelationen för rörelsemängdseigenfunktionerna.

(b) Visa att svaret i (a) är proportionellt mot e^{cS} där c är en konstant och

$$S = \int_{t_0}^t L dt'$$

är den klassiska verkansintegralen för en fri partikel som startar från x_0 vid tiden t_0 och slutar i x vid tiden t och $L = T - V$ är Lagrangefunktionen.

(a) För en fri partikel är Hamiltonoperatoren $\hat{H} = \hat{T} = \hat{p}^2/2m$. Beräkna propagatorn genom att sätta in fullständighetsrelationen med plana vågor $\langle x | p \rangle = e^{ipx/\hbar}/\sqrt{2\pi\hbar}$ som är egenfunktionerna till $\hat{p}$ -operatoren:

$$\begin{aligned} K(x, x_0; t - t_0) &= \langle x | e^{-i(t-t_0)\hat{H}/\hbar} | x_0 \rangle = \int \langle x | e^{-i(t-t_0)\hat{p}^2/2m\hbar} | p \rangle \langle p | x_0 \rangle dp \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{-i(t-t_0)p^2/2m\hbar} e^{ip(x-x_0)/\hbar} dp \\ &= \sqrt{\frac{m\hbar}{2\pi i(t-t_0)}} e^{im(x-x_0)^2/2\hbar(t-t_0)} \end{aligned}$$

(b) För en fri partikel är $F = 0 = ma \Rightarrow v = \text{konstant}$. För endimensionell likformig rörelse är $v = (x - x_0)/(t - t_0)$. Lagrangefunktionen för en fri partikel är $L = T - V = T = \frac{1}{2}mv^2 = \text{konstant}$. Verkansintegralen blir därför

$$S = \int_{t_0}^t L dt' = \frac{m}{2} \left(\frac{x - x_0}{t - t_0} \right)^2 \int_{t_0}^t dt' = \frac{m}{2} \left(\frac{x - x_0}{t - t_0} \right)^2 (t - t_0) = \frac{m(x - x_0)^2}{2(t - t_0)}$$

Jämförelse med lösningen i (a) ger

$$K(x, x_0; t - t_0) \propto e^{im(x-x_0)^2/2\hbar(t-t_0)} = e^{\frac{i}{\hbar}S}$$