



SF1672 Linjär algebra
Omtentamen
19 April 2022

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Katharina Jochemko

Tentamen består av åtta uppgifter. Del I utgörs av de fem första uppgifterna (Uppgift 1 - 5) som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Varje uppgift i del I ger 4 poäng. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna (Uppgift 6 - 8) och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Varje uppgift i del II ger 6 poäng. Bonuspoäng från del I av inlämningsuppgifterna och från quizzarna adderas till erhållna poäng på del I. Bonuspoäng från del II av inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del II. (Bonuspoäng räknas bara under samma läsår.)

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I (1-5)	20	Grundläggande problem	15	16	16	16	16	16
II (6-8)	18	Avancerade problem	0	0	4	8	11	14

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden tilldelas inte full poäng.

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Givet

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas till kolonnrummet, $\text{Col } A$, och en bas till radrummet, $\text{Row } A$, av A .

(4 p)

2. Låt

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 + 3x_3 = 0\}$$

vara ett plan och

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

vara en vektor i $\mathbb{R}^3$. Bestäm avståndet mellan $\mathbf{v}$ och H .

(4 p)

3. Givet matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bestäm om P är diagonaliserbar.

(4 p)

4. Givet

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en minstakvadratlösning till systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(4 p)

5. Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ vara basen i $\mathbb{R}^3$ som ges av

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

och låt $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Bestäm basbytematriserna $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}$ och $\mathcal{P}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$.

(4 p)

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. Bestäm vilka av följande avbildningar som är linjära.

(i)

$$\begin{aligned} S: \mathbb{R}^{3 \times 3} &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det A \end{aligned}$$

(2 p)

(ii)

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^{2 \times 2} &\rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ A &\mapsto A^T + A \end{aligned}$$

(2 p)

(iii)

$$\begin{aligned} Q: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \end{aligned}$$

(2 p)

Observera: Poäng ges för argumentationen i Uppgift 6. Speciellt ges inga poäng för svar som inte motiveras eller förklaras.

7. Låt $\mathbb{P}_2 = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2 med en inre produkt definierad som

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

för alla $p(t), q(t) \in \mathbb{P}_2$. Definiera polynomen

$$p_1(t) = t(t-1) \quad , \quad p_2(t) = (t-1)(t-2) \quad , \quad p_3(t) = t^2.$$

(i) Visa att $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ är linjärt oberoende.

(3 p)

- (ii) Låt $W = \text{span}\{p_1(t), p_2(t)\}$ vara delrummet som spänns upp av polynomen $p_1(t)$ och $p_2(t)$. Bestäm projektionen, $\text{proj}_W p_3(t)$, av $p_3(t)$ på W . **(3 p)**

8. Låt $\mathcal{E}$ vara ellipsen som ges av

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2: 10x_1^2 + 12x_1x_2 + 10x_2^2 \leq 1\}.$$

Bestäm arean, $\text{area } \mathcal{E}$, av $\mathcal{E}$.

(6 p)

