

Tentamen i Hållfasthetslära grundkurs med energimetoder (SE1055), 31 maj, 2019, 8.00-13.00

Resultat finns på Mina Sidor senast den 29 juni, 2019.

Hjälpmedel: Formelsamling i hållfasthetslära, matematisk handbok och räknedosa.

Examinator: Peter Gudmundson, 076 213 2254

OBS! Skriv endast på en sida av bladen.

Skriv tydligt namn, program och personnummer på varje blad.

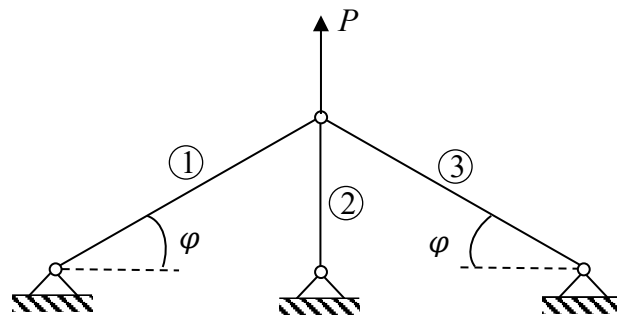
Rita gärna figurer i färg men ej med rödpenna.

Exakt metod ska användas för lösning om inte annat anges i uppgiften

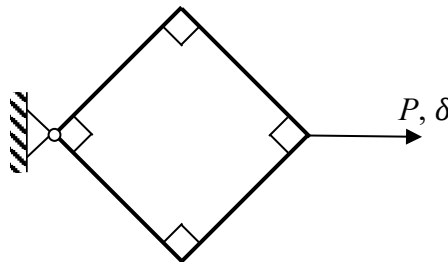
Betygsgränser: F: 0 - 11; FX: 12 - 13; E: 14 - 17; D: 18 - 21; C: 22 - 24; B: 25 - 28;

A: 29 - 40. FX = möjlig komplettering till E. Maximum 4 bonuspoäng.

1. Stång 2 i strukturen enligt figuren nedan ges en temperaturökning ΔT i förhållande till stängerna 1 och 3. Temperaturutvidgningskoefficienten för stången är α . Beräkna vilken kraft P som erfordras för att spänningen i stång 2 ska vara noll. Längden av stängerna 1 och 3 är L . Styvheten för samtliga stänger ges av EA . (6p)

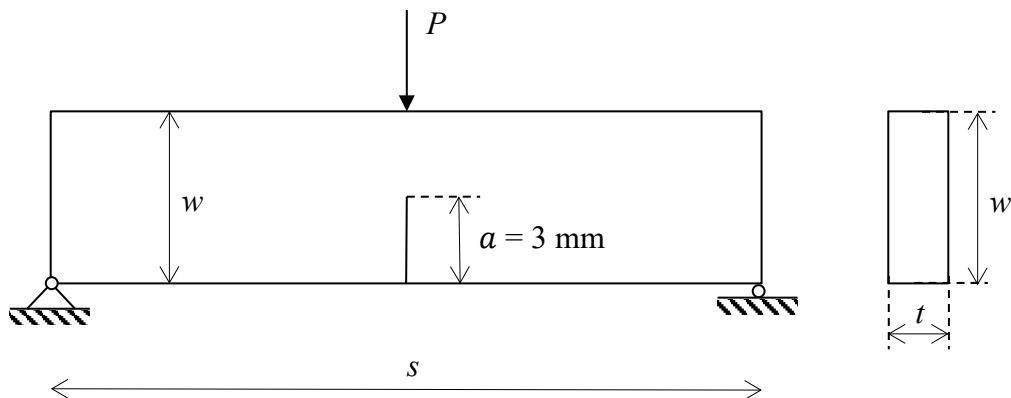


2. Bestäm förskjutningen δ av lastangreppspunkten för kraften P . Alla fyra balkar har längden L och böjstyvheten EI . Balkarna är sammansvetsade så att vinkeln $\pi/2$ mellan balkarna behålls under deformation. (Balkarnas längdförändring kan försummas.) (6p)

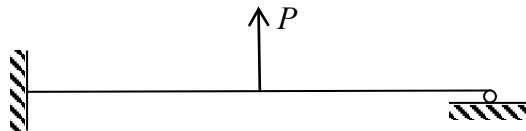


3. På en tunn plåt har töjningarna $\epsilon_x = 0,0015$, $\epsilon_y = 0,0009$, $\gamma_{xy} = 0,0020$ mätts upp. Materialet i plåten är linjärt elastiskt med E-modulen $E = 210$ GPa och Poissons tal $\nu = 0,3$. Beräkna effektivspänningen enligt Trescas hypotes. (6p)

4. En balk ska dimensioneras mot brott orsakad av en eventuell spricka i den högst belastade delen. Provning har gjorts som visar att sprödbrott sker för den dimensionerande kraften $P = P_{krit}$ då höjden w_0 på balken är 5 mm och spricklängden $a = 3$ mm. Man vill ha en säkerhetsmarginal så att brott istället initieras för lasten $P = 2P_{krit}$ för samma spricklängd, $a = 3$ mm. Vilken höjd w på balken ska väljas? Det antages att linjär brottmekanik kan användas. Den resulterande ekvationen kan lösas numeriskt, exempelvis med passningsräkning. Två siffrors noggrannhet är tillräckligt. (6p)



5. Använd principen om den potentiella energins minimum för att bestämma ett approximativt värde på utböjningen vid angreppspunkten för kraften P . Balken har längden L och böjstyvheten EI . Kraften angriper i mitten på balken. Den vänstra delen är fast inspänd och den högra änden är fritt upplagd. (6p)



6. En oändligt lång balk med böjstyvheten EI och massan per längdenhet ρA är upplagd på ett fjädrande underlag som motsvaras av en kraft per längdenhet $q_k = -\kappa w$, där w betecknar balkens utböjning. Analysera vågutbredning i balken med ansatsen $w = w_0 \sin(kx - \omega t)$ och beräkna fashastigheten $c = \omega/k$ som funktion av vågtalet $k = 2\pi/\lambda$. (6p)

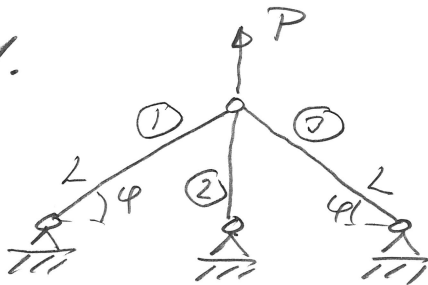
Ledning: Tröghetskrafter kan beskrivas som en ytterligare kraft per längdenhet, $q_m = -\rho A \ddot{w}$.

Balk, böjstyvhet EI , massa per längdenhet ρA



Förslag till lösningar, tentamen 2019-05-31

1.

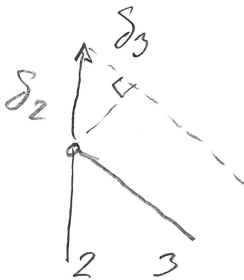


$$N_2 = 0 \Rightarrow \delta_2 = \alpha \Delta T L \sin \varphi$$

$$N_1 = N_3 = N$$



$$\Rightarrow N = \frac{P}{2 \sin \varphi}$$



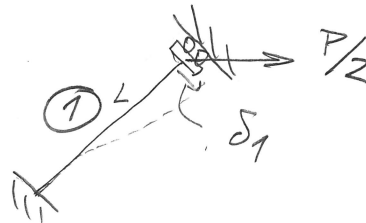
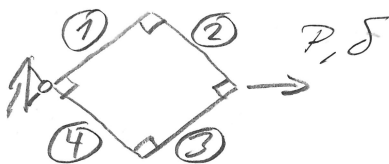
$$\delta_1 = \delta_3 = \delta$$

$$\delta = \delta_2 \sin \varphi = \alpha \Delta T L \sin^2 \varphi$$

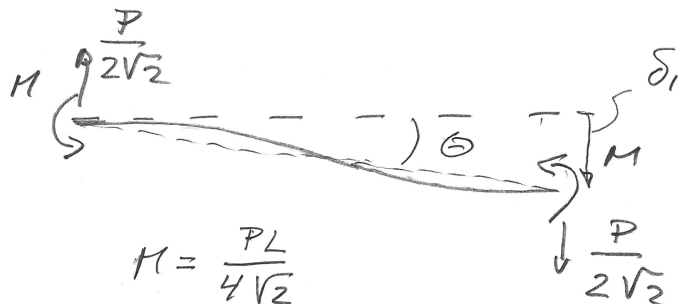
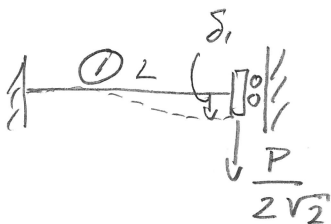
$$N = \frac{EA}{L} \delta$$

$$\Rightarrow P = 2N \sin \varphi = \underline{\underline{2EA \alpha \Delta T \sin^3 \varphi}}$$

2. Symmetri, alla balkar lika belastade



$$\delta = 2 \cdot \frac{\delta_1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \delta_1$$



$$M = \frac{PL}{4\sqrt{2}}$$

FS Tab 31.2.5 $\Rightarrow$

$$\theta = \frac{ML}{6EI} ; \delta_1 = \theta L$$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{2} \delta_1 = \sqrt{2} \frac{L^2}{6EI} \cdot \frac{PL}{4\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{PL^3}{24EI}}}$$

3. FS 3.5 (Plan spanning)

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = 408,5 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 311,5 \text{ MPa},$$

$$\tau_{xy} = 161,5 \text{ MPa}$$

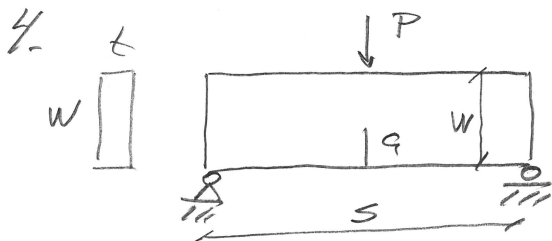
FS 1.19 (Huvudspränningar)

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 528,6 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 191,4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 0 \quad (\text{plan spanning})$$

$$\text{FS 3.32} \Rightarrow \sigma_e = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|) \approx 530 \text{ MPa}$$



$$a = 3 \text{ mm}, \quad W_0 = 5 \text{ mm}$$

$$P = P_{\text{krit}} \Rightarrow K_I = K_{IC}$$

$$\text{FS 23.10.11} \Rightarrow$$

$$K_I = \frac{P_{\text{krit}} S}{t W_0^{3/2}} f_{II} \left(\frac{a}{W_0} \right) = K_{IC}$$

$$a = 3 \text{ mm}, \quad W = ?$$

$$P = 2 P_{\text{krit}} \Rightarrow K_I = K_{IC}$$

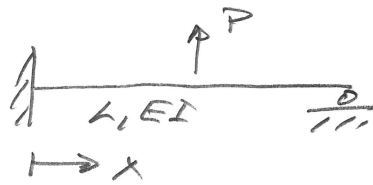
$$\Rightarrow \frac{2 P_{\text{krit}} S}{t W^{3/2}} f_{II} \left(\frac{a}{W} \right) = \frac{P_{\text{krit}} S}{t W_0^{3/2}} f_{II} \left(\frac{a}{W_0} \right) \quad ; \quad \frac{a}{W_0} = 0,6$$

$$\Rightarrow 2 \left(\frac{W_0}{W} \right)^{3/2} f_{II} \left(0,6 \frac{W_0}{W} \right) = f_{II} (0,6) = 3,75$$

Passningsräkning från diagram (FS 23.10.11)

$$\text{ger: } \frac{W_0}{W} \approx 0,79 \Rightarrow W = \frac{W_0}{0,79} \approx 6,2 \text{ mm}$$

5.



$$w(0) = w(L) = 0; \quad w'(0) = 0$$

$$\text{Ansatz: } w(x) = Ax^2(x-L)$$

$$w''(x) = A(6x - 2L)$$

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} EI (w'')^2 dx - P w(L) =$$

$$= 2EI L^3 A^2 + P \frac{L^3}{8} A$$

$$\frac{\partial U}{\partial A} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = - \frac{P}{32EI}$$

$$\Rightarrow w\left(\frac{L}{2}\right) = - \frac{P}{32EI} \left(\frac{-L^3}{8}\right) = \underline{\underline{\frac{PL^3}{256EI}}}$$

$$6. \quad \text{FS 6.20} \Rightarrow EI w^{IV} = \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_K + \mathcal{F}_m = -\kappa w - \mathcal{S} A \ddot{w}$$

$$\Rightarrow EI w^{IV} + \kappa w + \mathcal{S} A \ddot{w} = 0$$

$$\text{Ansatz } w = w_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow EI k^4 + \kappa - \mathcal{S} A \omega^2 = 0$$

$$\omega = k^2 \sqrt{\frac{EI}{\mathcal{S} A}} \left[1 + \frac{\kappa}{k^4 EI} \right]^{1/2}$$

$$c = \frac{\omega}{k} = k \sqrt{\frac{EI}{\mathcal{S} A}} \left[1 + \frac{\kappa}{k^4 EI} \right]^{1/2}$$