

SK1104 Klassisk fysik

Lösningsförslag till tentamen

Fredagen den 10 juni, 2022, 08:00-10:30

Del A - 1p per deluppgift

1. a) Eftersom likströmskretsen har varit påslagen en längre tid, är kondensatorn fullt uppladdad och det går således ingen ström genom kondensatorn. Spänningsdelning mellan resistanserna R_1 och R_2 ger då att

$$V_{ut} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V \Rightarrow V_{ut} = \frac{3,0}{1,0 + 3,0} \cdot 50 \text{ V} = 37,5 \text{ V}$$

b) Enligt Ampere's lag gäller för en kontur som ligger på avståndet $r < r_i$ mm från centrum av röret att

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\varphi \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\text{omsluten}} = 0 \Rightarrow B_\varphi = 0$$

där vi utnyttjar att magnetfältet i cylindergeometri har cylindrisk symmetri. På motsvarande sätt får vi för en kontur som ligger på avståndet $r > r_i$ från röret att

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\varphi \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\text{omsluten}} = \mu_0 I \Rightarrow B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

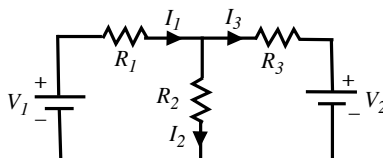
vilket är samma formel som för en lång, rak ledare.

c) Eftersom det rör sig om en växelströmskrets i kontinuerlig drift, kan vi använda oss av $j\omega$ -metoden. Den totala komplexa impedansen i kretsen är

$$Z = R + j\omega L \Rightarrow I = \frac{V}{|Z|} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \Rightarrow I = 9,0 \text{ A}$$

Del B - 4p per uppgift

2. För att kunna beräkna effektutvecklingen, behöver vi rösts känna till strömmarna i vardera gren av kretsen. Inför strömmar enligt figuren nedan.



Enligt Kirchhoffs strömlag har vi att:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Enligt Kirchhoffs spänningslag gäller för vardera maskan att:

$$V_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0$$

$$-V_2 + R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0$$

Lös ut I_1 respektive I_2 ur Kirchhoffs spänningslag.

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} I_2 \quad \text{samnt} \quad I_3 = -\frac{V_2}{R_3} + \frac{R_2}{R_3} I_2$$

Sätt in dessa uttryck i strömlagen

$$\frac{V_1}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} I_2 - I_2 + \frac{V_2}{R_3} - \frac{R_2}{R_3} I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_3}}{1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_3}}$$

Insättning av värden ger att

$$I_2 = \frac{\frac{18,0}{5,0} + \frac{9,0}{2,0}}{1 + \frac{10,0}{5,0} + \frac{10,0}{2,0}} \text{ mA} = \frac{81}{80} \text{ mA}$$

Av detta följer då även att

$$I_1 = \frac{18,0}{5,0} - \frac{10,0}{5,0} \cdot \frac{81}{80} \text{ mA} = \frac{126}{80} \text{ mA}$$

$$I_3 = -\frac{9,0}{2,0} + \frac{10,0}{2,0} \cdot \frac{81}{80} \text{ mA} = \frac{45}{80} \text{ mA}$$

Den totalt utvecklade effekten i kretsen är summan av effekterna som utvecklas i vardera resistorn. Detta ger att

$$P_{tot} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2$$

och med insatta värden får vi att

$$P_{tot} = \frac{5,0 \cdot 126^2 + 10,0 \cdot 81^2 + 2,0 \cdot 45^2}{80^2} \text{ mW} = 23 \text{ mW}$$

3. Av symmetrin i problemet (lika långa stavar, samma yfladdningstäthet, samma geometri och samma avstånd från stavar) framgår att bidraget till potentialen kommer att bli lika stort för vardera av stavar. Den totala potentialen blir således tre gånger så stor som potentialen från en av stavar. Potentialen på avståndet x mitt på en stav med längden $2a$ kan beräknas enligt definitionen av potential

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{\lambda dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + a^2} + a}{\sqrt{x^2 + a^2} - a} \right)$$

Denna formel återfinns även i läroboken och kan hämtas där. Enligt geometrin i uppgiften har vi uppenbarligen att $L = 2a = 50 \text{ cm}$, vilket ger att $a = 25$

cm samt att $x = a \cdot \tan 30^\circ = a/\sqrt{3}$ cm. Numerisk får vi då att den totala potentialen är

$$V = 3 \cdot \frac{5,0 \cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}} \ln \left(\frac{\sqrt{\frac{0,25^2}{3} + 0,25^2} + 0,25}{\sqrt{\frac{0,25^2}{3} + 0,25^2} - 0,25} \right) V = 355 \text{ V}$$

4. a) En transformatorstation har strömslingor som ger upphov till magnetfält. Vi kan därför tänka oss att magnetfältet från den mer eller mindre punktformade källan avtar på samma sätt som från en ledande ring. Längs med huvudaxeln x för en ledande ring med radien a har vi att magnetfältet kan tecknas

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \approx \frac{\mu_0 I a^2}{2x^3} \quad \text{när } x \gg a$$

Magnetfältet avtar således med kuben på avståndet för stora x . Eftersom dc-fältet från transformatorn var $B_1 = 10 \mu\text{T}$ på avståndet $r_1 = 5,0$ m från den samma, får vi att dc-fältet från transformatorn på avståndet $r_2 = 20$, m ges av

$$B \cdot x^3 = \text{konstant} \quad \Rightarrow \quad B_1 r_1^3 = B_2 r_2^3 \quad \Rightarrow \quad B_2 = 10 \cdot \frac{5,0^3}{20^3} \mu\text{T} = 0,15 \mu\text{T}$$

Det uppmätta värdet kommer således att ligga nära det jordmagnetiska fältet och med den upplösning som finns i värdena kommer det inte att göra någon skillnad och det uppmätta värdet blir $55 \mu\text{T}$.

b) Bruset orsakas av ac-komponenten hos det magnetiska fältet (eftersom dc-delen enbart ger ett konstant fält genom trådslingan som inte ger någon ändring av fältet). På samma sätt som förut blir det största varierande ac-fältet genom trådslingan i laboratoriet (vi antar att slingan är vinkelrät mot fältet, vilket är det mest ogynnsamma fallet)

$$B_2 = 3,15 \cdot \frac{5,0^3}{200^3} \mu\text{T} = 4,9 \cdot 10^{-11} \text{ T}$$

Detta betyder att det magnetisk flödet genom trådslingan blir

$$\Phi = 4,9 \cdot 10^{-11} \cdot 0,02^2 \text{ Vs} = 2,0 \cdot 10^{-14} \text{ Vs}$$

Det magnetiska flödet som maximalt passerar genom ytan kommer emellertid att förstärkas med en faktor 5 när det når SQUID-detektorn, eftersom bruset fångas upp av en lindning med 1 varv där det induceras en ström som passerar lindningen med 5 varv ovanför detektorn och därför ger 5 gånger större magnetiskt flöde där. Det magnetiska brus som når detektorn (uttryckt i antal flödeskvanta blir då)

$$N = \frac{5\Phi}{\Phi_0} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{5 \cdot 2,0 \cdot 10^{-14} \cdot 2 \cdot 1,60219 \cdot 10^{-19}}{6,626 \cdot 10^{-34}} = 48$$