



**SF1672 Linjär algebra**  
**Tentamen**  
**Fredagen den 17 april 2020**

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de fem första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del I. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

| Del | Poäng | Innehåll              | Fx | E  | D  | C  | B  | A  |
|-----|-------|-----------------------|----|----|----|----|----|----|
| I   | 20    | Grundläggande problem | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 |
| II  | 12    | Avancerade problem    | 0  | 0  | 2  | 4  | 6  | 8  |

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

---

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Givet matrisen

$$A_h = \begin{bmatrix} 3 & 19 & 3h+2 \\ 1 & 5 & h \\ 7 & 39 & 8h-3 \end{bmatrix}.$$

Bestäm alla  $h \in \mathbb{R}$  för vilka avbildningen  $T_{A_h}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \mapsto A_h \mathbf{x}$  är inverterbar.

(4 p)

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 4 & -7 & -10 & -3 \\ -4 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas till kolonrummet  $\text{Col}A$  av  $A$  och en bas till nollrummet  $\text{Nul}A^T$  av  $A^T$ .

(4 p)

3. Låt

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, P_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

vara hörnen av en parallelogram  $\Pi$  i  $\mathbb{R}^3$ . Bestäm arean av  $\Pi$ .

(4 p)

4. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en diagonalmatris  $D$  och en inverterbar matris  $P$  sådana att  $D = P^{-1}AP$ . **(4 p)**

5. Låt

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vara vektorer i  $\mathbb{R}^4$ . Låt  $W = \text{span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$  vara det linjära höljet av  $\mathbf{w}_1$  och  $\mathbf{w}_2$ . Bestäm den ortogonala projektionen

$$\text{proj}_W(\mathbf{v}).$$

**(4 p)**

---

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt  $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]^T$  vara en vektor i  $\mathbb{R}^3$ .

(a) Visa att  $T_{\mathbf{v}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{x}$  är en linjär avbildning. **(2 p)**

(b) Bestäm  $A_{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  sådan att  $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = A_{\mathbf{v}}\mathbf{x}$  för alla  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ . **(2 p)**

7. Låt  $V$  vara ett vektorrum med inre produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  och låt  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  vara en bas av  $V$ . Låt  $A = (a_{ij})$  vara matrisen definierad som

$$a_{ij} = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle.$$

Visa att det finns en matris  $P$  och en diagonalmatris  $D$  med positiva tal på diagonalen så att  $D = P^T A P$ .

**(4 p)**

8. Låt  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vara en matris och  $k \in \mathbb{N}$  en naturligt tal så att  $A^k \neq 0$  och  $A^{k+1} = 0$ .

(a) Visa att  $I_n, A, A^2, \dots, A^k$  är linjärt oberoende. **(2 p)**

(b) Visa att  $I_n - A$  är inverterbar. **(2 p)**

---