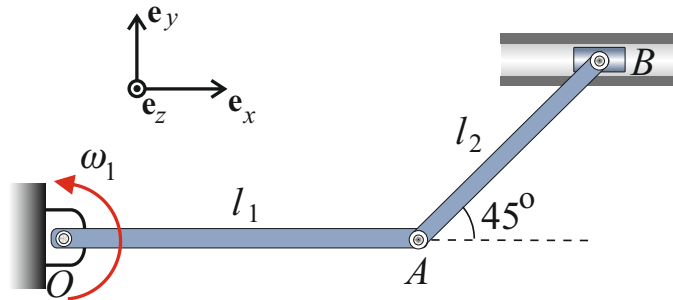


Lösningar till problemtentamen, SG1113, 25/10, 2024

1.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_A &= \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{OA} = \omega_1 \mathbf{e}_z \times l_1 \mathbf{e}_x = \omega_1 l_1 \mathbf{e}_y \\
 \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{v}_A + \omega_2 \mathbf{e}_z \times \frac{l_2}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \\
 &= -\omega_2 \frac{l_2}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_x + \left(\omega_1 l_1 + \frac{l_2}{\sqrt{2}} \omega_2 \right) \mathbf{e}_y \\
 \omega_2 &= -\sqrt{2} \frac{l_1}{l_2} \omega_1 \\
 \mathbf{v}_B &= \omega_1 l_1 \mathbf{e}_x \\
 \mathbf{a}_A &= -\omega_1^2 \mathbf{r}_{OA} = -\omega_1^2 l_1 \mathbf{e}_x \\
 \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha}_2 \times \mathbf{r}_{AB} - \omega_2^2 \mathbf{r}_{AB} \\
 &= -\omega_1^2 l_1 \mathbf{e}_x + \alpha_2 \mathbf{e}_z \times \frac{l_2}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) - \omega_2^2 \frac{l_2}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \\
 &= \left(-\omega_1^2 l_1 - \alpha_2 \frac{l_2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \omega_1^2 \frac{l_1^2}{l_2} \right) \mathbf{e}_x + \left(\alpha_2 \frac{l_2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \omega_1^2 \frac{l_1^2}{l_2} \right) \mathbf{e}_y \\
 \alpha_2 &= 2\omega_1^2 \frac{l_1^2}{l_2} \\
 \mathbf{a}_B &= -\frac{2\sqrt{2}l_1 + l_2}{l_2} l_1 \omega_1^2 \mathbf{e}_x
 \end{aligned}$$



2. Newtons andra lag ger

$$m a_{Gx} = 0 \quad (1)$$

$$m a_{Gy} = F - mg \quad (2)$$

Momentekvationen ger

$$I_G \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} L F \Rightarrow \frac{1}{12} m L^2 \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} L F \Rightarrow F = \frac{\sqrt{2}}{6} m L \alpha \quad (3)$$

Låt $\alpha_2 = \alpha_2 \mathbf{e}_z$ vara linans vinkelacceleration. I begynnelseögonblicket fås

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_0 + \alpha_2 \mathbf{e}_z \mathbf{r}_{0A} = \alpha_2 \mathbf{e}_z \times -r_{OA} \mathbf{e}_y = -\alpha_2 r_{OA} \mathbf{e}_y$$

I begynnelseögonblicket fås då

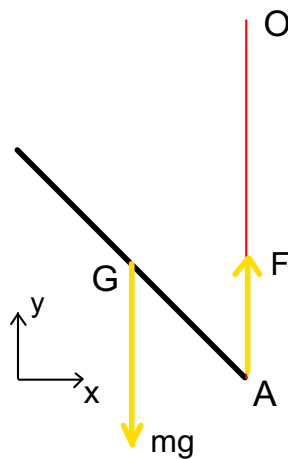
$$\mathbf{a}_G = a_B \mathbf{e}_x + \alpha \mathbf{e}_z \times \frac{L}{2\sqrt{2}} (-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) = \left(a_B + \frac{\alpha L}{2\sqrt{2}} \right) \mathbf{e}_x - \frac{\alpha L}{2\sqrt{2}} \mathbf{e}_y. \quad (4)$$

Ekvationerna (2), (3) och (4) ger nu

$$\frac{\sqrt{2}}{6} L \alpha - g = -\frac{\alpha L}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{6\sqrt{2}}{5} \frac{g}{L} \quad (5)$$

och

$$F = \frac{2}{5} mg \quad (6)$$

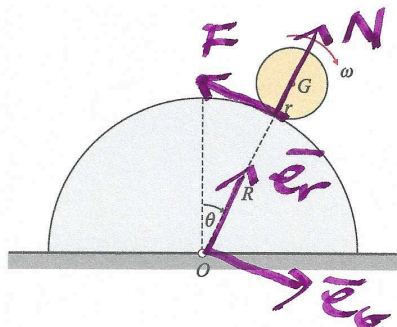


3. Newtons andra lag ger

$$-(R+r)\dot{\theta}^2 = N - mg \cos \theta \quad (7)$$

$$(R+r)\ddot{\theta} = -F + mg \sin \theta \quad (8)$$

Masscentrum rör sig i en cirkel med vinkelhastigheten $\dot{\theta}$, alltså har vi att



$$v_G = (R+r)\dot{\theta} \quad (9)$$

Cylinderns kinetiska energi är

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 = \frac{3}{4}mv_G^2 = \frac{3}{4}m(R+r)^2\dot{\theta}^2 \quad (10)$$

och dess potentiella energi kan skrivas

$$V = mg(R+r) \cos \theta. \quad (11)$$

Energiekvationen ger nu

$$\begin{aligned} mg(R+r) &= \frac{3}{4}m(R+r)\dot{\theta}^2 + mg(R+r) \cos \theta \Rightarrow \\ m(R+r)\dot{\theta}^2 &= \frac{4}{3}mg(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (12)$$

Vi deriverar detta uttryck och får

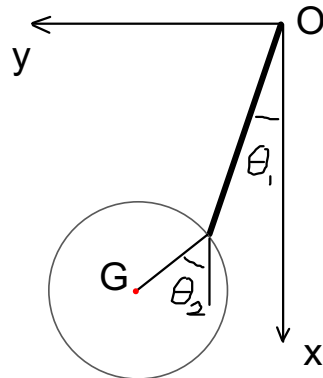
$$m(R+r)\ddot{\theta} = \frac{2}{3}mg \sin \theta \quad (13)$$

Vi sätter in (12) i (7) och (13) i (8) och löser för N och F ,

$$N = \frac{1}{3}mg(7 \cos \theta - 4) \quad (14)$$

$$F = \frac{1}{3}mg \sin \theta \quad (15)$$

Kropparna förlorar kontakten med varandra då $N = 0$. Om friktionstalet är oändligt stort sker detta för $\theta_{max} = \arccos(4/7)$. Om friktionstalet är ändligt börjar cylindern att glida innan den kommit så långt och det är omöjligt att säga när den förlorar kontakten med underlaget om friktionstalet inte är givet.



4. Systemet har två frihetsgrader. Vi väljer θ_1 och θ_2 (se figur) som generaliserade koordinater.

Den kinetiska och potentiella energin för stången är

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m (2r)^2 \dot{\theta}_1^2 = \frac{2}{3} m r^2 \dot{\theta}_1^2 \\ V_1 &= -mgr \cos \theta_1 \end{aligned}$$

Koordinaterna för skivans masscentrum är

$$\begin{aligned} x &= 2r \cos \theta_1 + r \cos \theta_2 \\ y &= 2r \sin \theta_1 + r \sin \theta_2 \end{aligned}$$

Den kinetiska och potentiella energin för skivan ges av

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}_2^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left(4r^2 \dot{\theta}_1^2 + r^2 \dot{\theta}_2^2 + 4r^2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} m r^2 \dot{\theta}_2^2 = 2m r^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{3}{4} m r^2 \dot{\theta}_2^2 + 2m r^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ V_2 &= -2mgr \cos \theta_1 - mgr \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Lagrangianen för systemet ges av

$$\begin{aligned} L &= T - V = T_1 + T_2 - V_1 - V_2 = \\ &= \frac{8}{3}mr^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{3}{4}mr^2\dot{\theta}_2^2 + 2mr^2\cos(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 3mgr\cos\theta_1 + mgr\cos\theta_2 \end{aligned}$$

Lagrange ekvationer kan nu skrivas

$$\begin{aligned} -3g\sin\theta_1 + 2r\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \frac{d}{dt}\left(\frac{16}{3}r\dot{\theta}_1 + 2r\cos(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_2\right) &= 0 \\ -g\sin\theta_2 - 2r\sin(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}r\dot{\theta}_2 + 2r\cos(\theta_2 - \theta_1)\dot{\theta}_1\right) &= 0 \end{aligned}$$

För att bestämma frekvenserna för små svängningar kring jämviktsläget, $\theta_1 = \theta_2 = 0$, linjäriserar vi ekvationerna

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \frac{9}{16}\frac{g}{r}\theta_1 + \frac{3}{8}\ddot{\theta}_2 &= 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{2}{3}\frac{g}{r}\theta_2 + \frac{4}{3}\ddot{\theta}_1 &= 0 \end{aligned}$$

Ekvationen för frekvenserna blir nu

$$\begin{aligned} \left(-\omega^2 + \frac{9}{16}\frac{g}{r}\right)\left(-\omega^2 + \frac{2}{3}\frac{g}{r}\right) - \frac{1}{2}\omega^4 &= 0 \\ \omega^4 - 2\frac{59}{48}\frac{g}{r}\omega^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{g}{r}\right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

med lösning

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{59 \pm \sqrt{1753}}{48}} \sqrt{\frac{g}{r}} \quad (16)$$