



**SF1673 Analys i en variabel**  
**Tentamen**  
**Tisdagen den 14 april 2020**

Skrivtid: 08:00-13:00

Tillåtna hjälpmedel: inga

Examinator: Mats Boij

Tentamen består av åtta uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de fem första uppgifterna som testar förmågan att lösa grundläggande problem. Del II utgörs av de tre sista uppgifterna och testar förmågan att lösa mer avancerade problem som även kan vara av teoretisk karaktär och är avsedda främst för högre betyg. Bonuspoäng från inlämningsuppgifterna adderas till erhållna poäng på del I. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

| Del | Poäng | Innehåll              | Fx | E  | D  | C  | B  | A  |
|-----|-------|-----------------------|----|----|----|----|----|----|
| I   | 20    | Grundläggande problem | 15 | 16 | 16 | 16 | 16 | 16 |
| II  | 12    | Avancerade problem    | 0  | 0  | 2  | 4  | 6  | 8  |

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

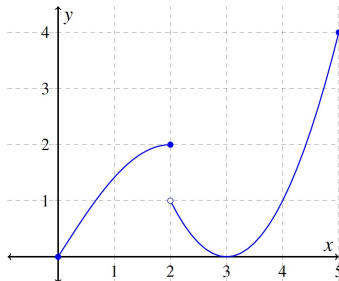
---

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. (a) Ange definitionen av att en funktion  $f(x)$  är kontinuerlig vid en punkt  $x = a$ .  
(b) Bestäm för vilka reella tal  $a$  som funktionen  $f(x) - g(x)$  är kontinuerlig på intervallet  $[0, 5]$ , där

$$g(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & x \in [0, 2] \\ \frac{\ln(x-1)}{a(x-2)} & x \in (2, 5], \end{cases}$$

och  $f(x)$  har grafen



och bevisa att den resulterande funktionen verkligen är kontinuerlig.

**(4 p)**

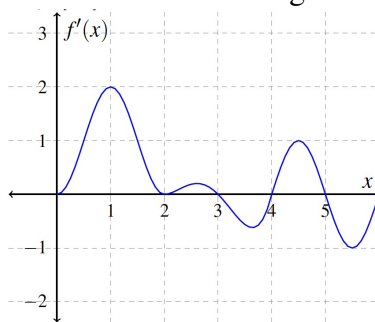
2. (a) Ange definitionen av att funktionen  $f(x)$  är deriverbar i punkten  $x = a$ . Om  $f(x)$  är deriverbar i  $x = a$ , ange definitionen av  $f'(a)$ .  
 (b) Bestäm en funktion  $f$  vars derivata ges av

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{x+h}}{1+(x+h)^2} - \frac{e^x}{1+x^2}}{h}.$$

- (c) Derivera funktionen  $f : (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  som ges av  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ , och visa utifrån definitionen att derivatan är korrekt.

(4 p)

3. (a) Ange definitionen av att en funktion  $f(x)$  har ett lokalt minimum vid  $x = a$ .  
 (b) Låt  $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$  vara en deriverbar funktion där grafen av  $f'(x)$  ges av



Bestäm för vilka  $x \in [0, 6]$  funktionen  $f$  har ett lokalt minimum. Kom ihåg att motivera ditt svar.

- (c) Låt  $h : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  vara funktionen som ges av

$$h(x) = \begin{cases} |x-1| & x \in [0, 2) \\ \sin(\pi x) & x \in [2, 5]. \end{cases}$$

Bestäm för vilka  $x \in [0, 5]$  funktionen  $h$  har ett lokalt minimum. Kom ihåg att motivera ditt svar.

(4 p)

4. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen  $y'' + 2y' + 5y = 10x - 1$ .

(4 p)

5. Beräkna arean mellan kurvorna  $f(x) = xe^x$  och  $g(x) = -\frac{1+x+x^2}{(1+x^2)x}$  för  $x$  i intervallet  $[1, 3]$ .  
 (Förvänta dig inte att det slutliga svaret är vackert.)

(4 p)

## DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. För varje del, ge ett exempel på en funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  som har de angivna egenskaperna:  
 (a)  $f$  är kontinuerlig men inte deriverbar vid varken  $x = 1$  eller  $x = 5$ .  
 (b)  $f$  är deriverbar och har en maxpunkt vid  $x = -2$  och en minpunkt vid  $x = 1$ .  
 (c)  $f$  har en primitiv funktion  $F$  som är både avtagande på  $(-\infty, \infty)$  och  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = -10$ .

(4 p)

7. (a) Ange definitionen av att en talföljd  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  konvergerar mot  $L$  då  $n \rightarrow \infty$ . Bevisa antingen att talföljden

$$a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{2n} & n \text{ udda} \\ \frac{e^n+1}{2e^n} & n \text{ jämnt} \end{cases}$$

konvergerar, eller att den divergerar.

- (b) Bevisa att om  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  är en växande och uppåt begränsad talföljd så är den konvergent och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \geq 1\}.$$

**(4 p)**

8. Bevisa om den följande integralen konvergerar eller divergerar.

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2 |\sin x|^{1/2}} dx$$

**(4 p)**

---