

SK1104 Klassisk fysik

Lösningsförslag till tentamen

Måndagen den 13 mars, 2023, 14:00-16:30

Del A - 1p per deluppgift

1. a) De korrekta svaren är

2. Potentialen i metallplåtens plan är konstant för radien $r = 15$ cm.

3. I ett parallellt plan med mittpunkt i $x = 4,0$ cm, är potentialen på radien $r = 4,0$ cm densamma i alla punkter med denna radie.

b) Vid uppladdning av en kondensator i en RC -krets, ges laddningen på kondensatorn som funktion av tiden av ekvationen

$$q(t) = Q \left(1 - e^{-t/RC}\right) \Rightarrow t = -RC \ln \left(1 - \frac{q(t)}{Q}\right)$$

Av uppgiften framgår att vi söker den tidpunkt när $q(t)/Q = 0,99$, vilket betyder att tiden blir

$$t = -4,7 \cdot 10^3 \cdot 20,0 \cdot 10^{-6} \cdot \ln(1 - 0,99) \text{ s} = 0,43 \text{ s}$$

c) Med hjälp av $j\omega$ -metoden, ger Kirchhoffs spänningslag för kretsen att

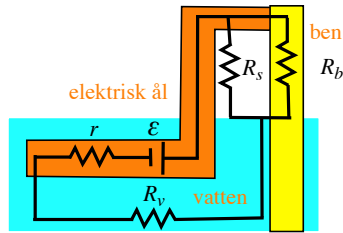
$$\check{U} - R\check{I} - j\omega L\check{I} = 0 \Rightarrow \check{I} = \frac{\check{U}}{R + j\omega L}$$

Den verkliga strömmen beräknas genom att ta absolutvärdet av detta uttryck, vilket ger

$$I = |\check{I}| = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \Rightarrow I = \frac{240}{\sqrt{50^2 + (2\pi \cdot 50 \cdot 50 \cdot 10^{-3})^2}} \text{ A} = 4,6 \text{ A}$$

Del B - 4p per uppgift

2. Av uppgiften framgår att den elektriska ålen kan modelleras som en elektrisk krets och vi behöver därför först rita upp denna elektriska krets. Av texten framgår att ålen i sig kan betraktas som en spänningskälla med $\varepsilon = 380$ V och den inre resistansen $r = 450 \Omega$. Strömmen från denna krets avges genom ett resistansnätverk som består av en parallellkoppling mellan djurets ben med resistansen $R_b = 2,1 \text{ k}\Omega$ och ålens skinn med resistansen $R_s = 2,4 \text{ k}\Omega$ från ålens huvud ned till vattenytan och därefter som en gemensam resistans på $R_v = 400 \Omega$ genom vattnet. Den elektriska kretsen kommer således att se ut på följande sätt:



De båda parallellkopplade resistorerna ger upphov till en ersättningsresistans som kan beräknas via

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_b} \Rightarrow R = \frac{R_s R_b}{R_s + R_b}$$

Den totala strömmen genom kretsen fås av Kirchhoffs spänningslag

$$\varepsilon - RI - R_v I - rI = 0 \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{\frac{R_s R_b}{R_s + R_b} + R_v + r}$$

Då vi känner den totala strömmen i kretsen, kan vi använda strömdelning mellan den ström som går genom ytterdelen av ålens skinn och djurets ben för att räkna fram strömmen genom djurets ben

$$I_b = \frac{R_s}{R_s + R_b} \cdot I = \frac{\varepsilon R_s}{R_s R_b + (R_v + r)(R_s + R_b)}$$

Insättning av värden ger slutligen att

$$I_b = \frac{380 \cdot 2,4 \cdot 10^3}{2,4 \cdot 2,1 \cdot 10^6 + (400 + 450)(2,4 + 2,1) \cdot 10^3} \text{ A} = 0,10 \text{ A}$$

3. Kondensatorns kapacitans när det enbart är luft mellan plattorna kan tecknas

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow C_0 = \frac{8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 4,0 \cdot 10^{-4}}{1,0 \cdot 10^{-2}} \text{ F} = 0,35 \text{ pF}$$

där $A = 4,0 \text{ cm}^2$ är plattornas area och $d = 1,0 \text{ cm}$ är avståndet mellan plattorna. Eftersom en tredubbling av kapacitansen efterfrågades, betyder det att den önskade kapacitansen när det dielektriska materialet befinner sig mellan plattorna är

$$C = 3C_0 = \frac{3\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow C = 1,1 \text{ pF}$$

Anta att det dielektriska materialet har tjockleken t . Potentialskillnaden mellan plattorna blir då

$$V_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_l \cdot (d - t) + E_d \cdot t$$

där E_l är det elektriska fältet i luft och $E_d = E_l/\epsilon_r$ är det elektriska fältet i det dielektriska materialet och $\epsilon_r = 4,5$ är givet i uppgiften. Detta medför att

$$V_{ab} = E_l \cdot (d - t) + \frac{E_l}{\epsilon_r} \cdot t = E_l \left[d - t \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \right]$$

Den totala laddningen som finns lagrad på kondensatorplattan kan beräknas via Gauss lag och en omslutande yta vars ena del går genom kondensatorn och som omsluter den ena av kondensatorplattorna. Vi får då att

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_A \vec{E}_l \cdot d\vec{A} = E_l A + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = E_l A \Rightarrow Q = \epsilon_0 E_l A$$

om ytan inuti kondensatorn går genom luften och

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_A \epsilon_r \vec{E}_d \cdot d\vec{A} = \epsilon_r E_d A + 0 + \dots = E_l A \Rightarrow Q = \epsilon_0 \epsilon_r E_d A = \epsilon_0 E_l A$$

om ytan inuti kondensatorn går genom det dielektriska materialet. Kondensatorns kapacitans kan nu tecknas

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\epsilon_0 E_l A}{E_l \left[d - t \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \right]} = 3C_0 = \frac{3\epsilon_0 A}{d}$$

Efter förenklingar fås att

$$\frac{d}{3} = d - t \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \Rightarrow t = \frac{d - \frac{d}{3}}{1 - \frac{1}{\epsilon_r}}$$

Insättning av värden ger slutligen att

$$t = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{4,5}} \cdot 1,0 \text{ cm} = 0,86 \text{ cm}$$

Anm: Exakt samma resultat får genom att betrakta den sammansatta kondensatorn som två seriekopplade kondensatorer med plattavstånd $d - t$ respektive t och sedan använda formeln för seriekoppling av kondensatorer.

4. För att kunna beräkna uppvärmningen behöver vi först beräkna den effekt som tillförs kopparcyldern genom virvelströmmarna. Effekten beror i sin tur på hur stor den inducerade spänningen är i kopparröret, vilken kan beräknas via Faraday's lag. Vi får således att den inducerade spänningen i kopparröret ($N = 1$ varv) är

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -A \frac{dB}{dt} = -\pi r^2 \cdot \frac{dB}{dt}$$

där $A = \pi r^2$ är den genomsnittliga cirkulära arean hos kopparröret och medelradien är $r = 3,00/2 \text{ cm} = 1,50 \text{ cm}$. Magnetfältet skapas i det här fallet av den långa, raka spolen. Magnetfältet genom en solenoid ges av

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l} \Rightarrow B(t) = \frac{\mu_0 N}{l} \cdot I_0 \cos \omega t$$

där $l = 30 \text{ cm}$ är längden av spolen och $N = 5000$ vilket ger att

$$\frac{dB}{dt} = -\frac{\mu_0 N}{l} \cdot \omega I_0 \sin \omega t \Rightarrow \varepsilon = \frac{\pi r^2 \mu_0 N}{l} \cdot 2\pi f I_0 \sin \omega t$$

För att kunna beräkna effekten, behöver vi känna till resistansen hos kopparröret. Eftersom de inducerade strömmarna kommer att cirkulera runt röret, får vi att rörets resistans är

$$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{\rho \cdot 2\pi r}{ht}$$

där $h = 4,0$ cm är rörets höjd och $t = 1,0$ mm är rörets tjocklek. Resistiviteten hos koppar $\rho = 1,68 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ hämtas från Tabell 12 i formelsamlingen, vilket ger att

$$R = \frac{1,68 \cdot 10^{-8} \cdot 2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^{-2}}{4,0 \cdot 10^{-2} \cdot 1,0 \cdot 10^{-3}} \Omega = 40 \mu\Omega$$

Eftersom röret är en resistans, får vi att den utvecklade effekten vid en viss given tidpunkt är

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \frac{\varepsilon^2}{R} \Rightarrow p(t) = \frac{(2\pi^2 r^2 f \mu_0 N I_0)^2}{l^2 R} \sin^2 \omega t$$

Eftersom tidsmedelvärdet av $\sin^2 \omega t$ över en period är $1/2$, får vi att medeleffekten av virvelströmmarna är

$$P = \frac{(2\pi^2 r^2 f \mu_0 N I_0)^2}{2l^2 R}$$

Insättning av värden ger att

$$P = \frac{(2\pi^2 \cdot 0,015^2 \cdot 50 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5000 \cdot 5,0)^2}{2 \cdot 0,30^2 \cdot 40 \cdot 10^{-6}} \text{ W} = 6,8 \text{ W}$$

Denna effekt värmer upp kopparröret under 1,0 minut, vilket ger att den tillförda energin är

$$E = P \cdot t = mc_V \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{Pt}{mc_v} = \frac{Pt}{\rho_{Cu} V_{Cu} c_v} = \frac{Pt}{\rho_{Cu} \cdot 2\pi r h t c_v}$$

Från Tabell 9 i formelsamlingen ser vi att densiteten $\rho_{Cu} = 8960 \text{ kg/m}^3$ för koppar. Insättning av värden ger då att

$$\Delta T = \frac{6,8 \cdot 60}{8960 \cdot 2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \cdot 4,0 \cdot 10^{-2} \cdot 1,0 \cdot 10^{-3} \cdot 385} \text{ K} = 31,5 \text{ K}$$