

SF1544 TENTAMEN, DEL 2  
Torsdag 17 mars 2022 kl 8.00-11.00

Rättas endast om Del 1 är godkänd. Betygsgräns: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A. Maximalt antal poäng 50.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas detaljerat. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

**Inga hjälpmedel är tillåtna** (ej heller miniräknare).

**P1** Vi vill hitta lösningar  $(x, y, z)$  till det icke-linjära ekvationssystemet

$$x^2 + y^2 = 5 - z^2$$

$$\sqrt{z} = 2x$$

$$x^2 + y = -z$$

- (6 p)      **a)** Inför lämpliga beteckningar och formulera Newtons metod för systemet. Ange explicita uttryck för alla element i de vektor- och matrisvärda funktionerna som ingår.
- (6 p)      **b)** Skriv ett Matlab-program som använder Newtons metod för att lösa ekvationssystemet. Svaret ska ha ett fel som är mindre än  $10^{-10}$  i alla komponenter. Använd startgissningen  $(0, 1, -1)$ .
- (3 p)      **c)** När Newtons metod används för att lösa ett ekvationssystem får man att normen av felvektorn  $e_k$  efter iteration  $k$  är:

| $k$         | 1   | 2    | 3                 |
|-------------|-----|------|-------------------|
| $\ e_k\ _2$ | 0.2 | 0.02 | $2 \cdot 10^{-4}$ |

Hur många ytterligare iterationer behövs för att få ett fel som är mindre än  $10^{-10}$ ? Motivera ditt svar!

**Var god vänd!**

**P2** Vi vill lösa följande integral numeriskt

$$\int_0^1 t + (3t + 5)^3 dt.$$

- (5 p)      **a)** Skriv ett Matlab-program som beräknar integralen med hjälp av trapetsregeln. Använd steglängden  $h = 1/16$ .
- (2 p)      **b)** Vilken noggrannhetsordning förväntar du dig av metoden i a)-uppgiften?
- (5 p)      **c)** Felet plottas i en loglog-graf mot steglängden. Resultat blir en linje. Förklara varför det blir en linje och ange vilken dess lutning blir.
- (3 p)      **d)** Vi använder istället Simpsons metod för att beräkna integralen. Vad blir felet då? Motivera ditt svar!

**Alternativ uppgift P2.** (15p) Härled en feluppskattning för approximation av integraler med någon kvadraturmetod.

**P3** Följande begynnelsevärdesproblem är givet

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - y), \quad 0 \leq t \leq 40.$$

med  $y(0) = 10^{-7}$ .

- (2 p)      **a)** Skissa hur lösningen beter sig samt ange en övre begränsning på  $y$ .
- (4 p)      **b)** Formulera Euler bakåt för problemet.
- (8 p)      **c)** Visa att Euler bakåt respekterar den övre begränsningen.
- (6 p)      **d)** Jämför beräkningsmässigt Euler bakåt med Euler framåt för detta specifika problem. Vilken metod rekommenderar du?

**Lycka till!**