



Lösningsförslag till Tentamen
19 April 2022

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Givet

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en bas till kolonnrummet, $\text{Col } A$, och en bas till radrummet, A , av A . **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi betraktar den associerade totalmatrisen av A och använder Gausselimination:

$$[A \quad 0] \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Från den reducerade trappstegsmatrisen erhåller vi att de icke-noll raderna bilda en bas till radrummet och att pivotkolonnerna i den ursprungliga matrisen bilda en bas till kolonnrummet, alltså

□

Svar. Bas till kolonnrummet: $\{[3, 2, 2, 1]^T, [4, 4, 3, 2]^T\}$
Bas till radrummet: $\{[1, 0, -1], [0, 1, 2]\}.$

2. Låt

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 + 3x_3 = 0\}$$

vara ett plan och

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

vara en vektor i $\mathbb{R}^3$. Bestäm avståndet mellan $\mathbf{v}$ och H .

(4 p)

Lösningsförslag. Avståndet mellan $\mathbf{v}$ och H är lika med längden av vektorn $\mathbf{v} - \text{proj}_H \mathbf{v}$. Vektorn $\mathbf{v} - \text{proj}_H \mathbf{v}$ är lika med projektionen på linjen genom origo som är ortogonal mot H , alltså

$$\mathbf{v} - \text{proj}_H \mathbf{v} = \text{proj}_L \mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} \mathbf{n}$$

där $\mathbf{n}$ är en normal vektor till planet H och $L = \{\lambda \mathbf{n} : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Från definitionen av H ser vi att $\mathbf{n} = [4, 0, 3]^T$ är en normal vektor till H . Vi har alltså

$$\mathbf{v} - \text{proj}_H \mathbf{v} = \frac{[1, 0, -1]^T [4, 0, 3]}{[4, 0, 3]^T [4, 0, 3]} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Avståndet mellan $\mathbf{v}$ och H är alltså

$$\|\mathbf{v} - \text{proj}_H \mathbf{v}\| = \frac{1}{25} \sqrt{25} = \frac{1}{5}.$$

□

Svar. Avståndet mellan $\mathbf{v}$ och H är lika med $\frac{1}{5}$.

3. Givet matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bestäm om P är diagonaliserbar.

(4 p)

Lösningsförslag. Matrisen A är övertriangulär. Egenvärdena av en sådan matris ligger på diagonalen. Matrisen A har alltså 5 och 1 som egenvärden med algebraiska multipliciteten 2 och 1 respektive.

Vi har

$$A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nollrummet av $A - 5I_3$ ges därmed av alla vektorer

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dimensionen av egenrummet till egenvärde 5 vilket är lika med det geometriska multipliciteten av 5 är alltså lika med 1 och därmed mindre än den algebraiska multipliciteten av 5. Alltså är A inte diagonaliserbar.

□

Svar. A är inte diagonaliserbar.

4. Givet

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm en minstakvadratlösning till systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (4 p)

Lösningsförslag. En vektor $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ är en minstakvadratlösning om och endast om den är en lösning till normalekvationen

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}.$$

Vi har

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

och

$$A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi måste alltså lösa systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vi använder Gausselimination på totalmatrisen och erhåller

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Parameterformen av lösningen är

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 + 1 \\ -x_3 + 1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Om vi sätter $x_3 = 0$, till exempel, då erhåller vi att $\hat{\mathbf{x}} = [1, 1, 0]^T$ är en lösning till normalekvationen och därmed en minstakvadratlösning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. □

Svar. Vektorn $\hat{\mathbf{x}} = [1, 1, 0]^T$ är en minstakvadratlösning.

5. Låt $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ vara basen i $\mathbb{R}^3$ som ges av

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

och låt $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^3$. Bestäm basbytematriserna $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}$ och $\mathcal{P}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$.

(4 p)

Lösningsförslag. Basbytematrisen $\mathcal{P}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$ är lika med matrisen som har kolonnerna $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Basbytematrisen $\mathcal{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}}$ ges av inversen av $\mathcal{P}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$. Vi använder Gausselimination och erhåller

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Alltså har vi

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = (\mathcal{P}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

$$\textbf{Svar. } \mathcal{P}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathcal{P}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

DEL II – AVANCERADE PROBLEM

6. Bestäm vilka av följande avbildningar som är linjära.

(i)

$$\begin{aligned} S: \mathbb{R}^{3 \times 3} &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det A \end{aligned}$$

(2 p)

(ii)

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^{2 \times 2} &\rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ A &\mapsto A^T + A \end{aligned}$$

(2 p)

(iii)

$$\begin{aligned} Q: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \end{aligned}$$

(2 p)

Observera: Poäng ges för argumentationen i Uppgift 6. Speciellt ges inga poäng för svar som inte motiveras eller förklaras.

Lösningsförslag. En avbildning $f: V \mapsto W$ från ett vektorrum V till ett vektorrum W är linjär om

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) \quad \text{och} \\ f(c\mathbf{v}) &= cf(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

gäller för alla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ och $c \in \mathbb{R}$.

(i): Avbildningen S är inte en linjär avbildning eftersom, till exempel,

$$S(3I_3) = \det(3I_3) = 27 \neq 3 = 3 \det I_3 = 3S(I_3).$$

(ii) Avbildningen T är linjär enligt räknereglarna för transponerade matriser,

$$\begin{aligned} T(A + B) &= (A + B)^T + (A + B) \\ &= A^T + B^T + A + B \\ &= (A^T + A) + (B^T + B) \\ &= T(A) + T(B) \quad \text{och} \\ T(cA) &= (cA)^T + (cA) = cA^T + cA = c(A^T + A) = cT(A). \end{aligned}$$

(iii) Avbildningen Q är inte linjär eftersom, till exempel,

$$Q(2[1, 1]^T) = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2^2 = 16 \neq 8 = 2(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 2Q([1, 1]^T).$$

□

7. Låt $\mathbb{P}_2 = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ vara vektorrummet av alla polynom av grad högst 2 med en inre produkt definierad som

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

för alla $p(t), q(t) \in \mathbb{P}_2$. Definiera polynomen

$$p_1(t) = t(t-1) \quad , \quad p_2(t) = (t-1)(t-2) \quad , \quad p_3(t) = t^2.$$

- (i) Visa att $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ är linjärt oberoende. (3 p)
 (ii) Låt $W = \text{span}\{p_1(t), p_2(t)\}$ vara delrummet som spänns upp av polynomen $p_1(t)$ och $p_2(t)$. Bestäm projektionen, $\text{proj}_W p_3(t)$, av $p_3(t)$ på W . (3 p)

Lösningsförslag. (i): För att visa att $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ är linjärt oberoende behöver vi inse att

$$c_1p_1(t) + c_2p_2(t) + c_3p_3(t) = \mathbf{0}(t)$$

gäller om och endast om $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, där $\mathbf{0}(t)$ betecknar nollpolynomet. För att inse detta sätter vi in olika värden för t :

$t = 1$:

$$c_1p_1(1) + c_2p_2(1) + c_3p_3(1) = 0 + 0 + c_3 \cdot 1^2 = 0 = \mathbf{0}(1) \Leftrightarrow c_3 = 0$$

$t = 0$:

$$c_1p_1(0) + c_2p_2(0) + c_3p_3(0) = 0 + c_2 \cdot (-1) \cdot (-2) + 0 = 0 = \mathbf{0}(0) \Leftrightarrow c_2 = 0$$

Alltså får vi att $c_2 = c_3 = 0$ och därmed följer också $c_1 = 0$ eftersom $p_1(t)$ inte är lika med nollpolynomet. Sammanfattat gäller $c_1p_1(t) + c_2p_2(t) + c_3p_3(t) = \mathbf{0}(t)$ bara om $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ och därmed är $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ linjärt oberoende.

(ii): Vi använder Gram-Schmidt processen på vektorerna $\{p_1(t), p_2(t)\}$ för att erhåller en ortogonal bas $\{q_1(t), q_2(t)\}$ av $\mathbb{P}_2$. Vi har

$$q_1(t) := p_1(t),$$

$$q_2(t) := p_2(t) - \frac{\langle p_2(t), p_1(t) \rangle}{\langle p_1(t), p_1(t) \rangle} p_1(t) = p_2(t),$$

eftersom

$$\langle p_2(t), p_1(t) \rangle = p_2(0)p_1(0) + p_2(1)p_1(1) + p_2(2)p_1(2) = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 0.$$

Alltså är $\{p_1(t), p_2(t)\}$ en ortogonal bas av W och

$$\text{proj}_W p_3(t) = \frac{\langle p_3(t), p_1(t) \rangle}{\langle p_1(t), p_1(t) \rangle} p_1(t) + \frac{\langle p_3(t), p_2(t) \rangle}{\langle p_2(t), p_2(t) \rangle} p_2(t)$$

där

$$\langle p_3(t), p_1(t) \rangle = p_3(0)p_1(0) + p_3(1)p_1(1) + p_3(2)p_1(2) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8,$$

$$\langle p_1(t), p_1(t) \rangle = p_1(0)^2 + p_1(1)^2 + p_1(2)^2 = 0^2 + 0^2 + 2^2 = 4,$$

$$\langle p_3(t), p_2(t) \rangle = p_3(0)p_2(0) + p_3(1)p_2(1) + p_3(2)p_2(2) = 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0.$$

Alltså

$$\text{proj}_W p_3(t) = \frac{8}{4}t(t-1) = 2t(t-1).$$

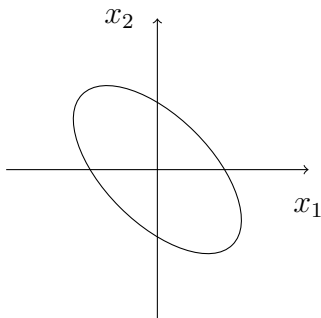
□

8. Låt $\mathcal{E}$ vara ellipsen som ges av

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 10x_1^2 + 12x_1x_2 + 10x_2^2 \leq 1\}.$$

Bestäm arean, area $\mathcal{E}$, av $\mathcal{E}$.

(6 p)



Lösningsförslag. Vi betraktar den kvadratiske formen $Q(\mathbf{x}) = 10x_1^2 + 12x_1x_2 + 10x_2^2$. Vi har

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$$

där

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Vi diagonaliserar A . Det karakteristiska polynomet av A är lika med

$$(10 - x)^2 - 6^2 = (4 - x)(16 - x),$$

alltså är egenvärdena lika med 4 och 16. Vi har

$$A - 4I_2 = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A - 16I_2 = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta medförer att $[1, -1]^T$ är en egenvektor med egenvärde 4 och $[1, 1]^T$ är en egenvektor med egenvärde 16. Vi normaliserar dessa vektorer och erhåller att vektorerna $\frac{1}{\sqrt{2}}[1, -1]^T$ och $\frac{1}{\sqrt{2}}[1, 1]^T$ bildar en ortonormal bas av egenvektorer av A . Enligt spektralsatsen kan vi skriva

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Vi tar rötterna av egenvärdena och få $A = M^T M$ där

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Vi betraktar basbyten $\mathbf{y} = M\mathbf{x}$. Vi har

$$y_1^2 + y_2^2 = \mathbf{y}^T \mathbf{y} \leq 1 \Leftrightarrow (M\mathbf{x})^T M\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \leq 1 \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{E}.$$

I andra ord, $\mathbf{x}$ är i ellipsen om och endast om $\mathbf{y}$ vilket är lika med bilden av $\mathbf{x}$ under den linjära avbildningen $\mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$ ligger i disken $D = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 \leq 1\}$. Alltså har vi

$$\text{area } D = |\det M| \text{ area } \mathcal{E} \Leftrightarrow \text{area } \mathcal{E} = \frac{1}{|\det M|} \text{ area } D = 1/8 \cdot \pi.$$

□

Svar. area $\mathcal{E} = \frac{\pi}{8}$