



**SF1681 Linjär algebra, fk  
Tentamen  
5 april 2018**

Skrivtid: 08:00-13:00  
Tillåtna hjälpmedel: inga  
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa basala problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg.

Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

| Del | Poäng | Innehåll           | Fx | E | D | C | B | A  |
|-----|-------|--------------------|----|---|---|---|---|----|
| I   | 12    | Basala problem     | 7  | 8 | 8 | 8 | 8 | 8  |
| II  | 8     | Begrepp och satser | 4  | 4 | 4 | 6 | 6 | 6  |
| III | 16    | Avancerade problem | 0  | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 |

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

*Var god vänd!*

## DEL I – BASALA PROBLEM

1. Låt  $k = \{0, 1, a, 1 + a\}$  vara kroppen med fyra element.
- (a) Skriv upp additions- och multiplikationstabellerna för  $k$ . (2 p)
  - (b) Bestäm en matris  $A$  med koefficienter i  $\mathbb{Z}_2$  sådan att  $k$  kan representeras av matriserna  $\{0, I, A, A + I\}$ . (2 p)
2. Låt  $V = P_5$  vara polynom i  $x$  av grad högst 5 med komplexa koefficienter. Definiera produkten av polynom i  $V$  som den vanliga produkten, men där vi bortser från termer som har grad 6 eller högre i produkten. Operatoren  $L: V \rightarrow V$  definieras av multiplikation med polynomet  $x^5 - x^4 + x^3$ .
- (a) Bestäm en bas för kärnan  $\ker(L)$ . (2 p)
  - (b) Bestäm en bas för bildrummet  $\operatorname{im}(L)$ . (2 p)
3. Bestäm singularvärden och singularvektorer till matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

## DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Betrakta operatorer  $L$  på ett ändligdimensionellt vektorrum  $V$ .
- (a) Definiera begreppen *minimalpolynom* och *karaktäristiskt polynom*. (1 p)
  - (b) Ge ett par belysande exempel på klasser av operatorer där minimalpolynomet inte är lika med det karaktäristiska polynomet. (1 p)
  - (c) Visa att alla egenvärden till en operator måste vara nollställen både till minimalpolynomet och till det karaktäristiska polynomet. (1 p)
  - (d) Vad säger Cayley-Hamiltons sats och vad kan man dra för slutsats från den om relationen mellan minimalpolynomet och det karaktäristiska polynomet? (1 p)
5. Låt  $V$  och  $W$  vara ändligdimensionella vektorrum.
- (a) Definiera tensorprodukten  $V \otimes W$ . (1 p)
  - (b) Visa att  $\dim V \otimes W = (\dim V)(\dim W)$ . (1 p)
  - (c) Visa att det finns en naturlig bilinjär avbildning  $\Phi: V \times W \rightarrow V \otimes W$ . (1 p)
  - (d) Tensorprodukten  $V \otimes W$  har tillsammans med den bilinjära avbildningen från del (c) en universell egenskap med avseende på bilinjära avbildningar  $V \times W \rightarrow U$ , nämligen att alla sådana faktoriserar på ett entydigt sätt via  $\Phi$ . Förklara vad detta innebär och skissera ett bevis för att detta gäller. (1 p)

## DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt  $V = \mathbb{C}[x]$  vara vektorrummet som består av polynom i en variabel med komplexa koefficienter. Definiera den inre produkten  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  så att  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$  bildar en ortonormal bas för  $V$ . Låt  $L: V \rightarrow \mathbb{C}$  vara den linjära avbildning som ges av  $L(p(x)) = p(1)$  och låt  $W = \ker(L)$ .

(a) Bestäm en ortogonal bas för  $W$ . (3 p)

(b) Bestäm en bas för  $W^\perp$ . (1 p)

7. För en linjär operator  $L$  på  $V$  kan vi bilda en linjär operator på  $V \otimes V$  genom  $I \otimes L - L \otimes I$ , där  $I$  är identitetsoperatoren på  $V$ .

(a) Bestäm rangen för  $I \otimes L - L \otimes I$  om  $L$  ges av matrisen (2 p)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Visa att  $I \otimes L - L \otimes I$  är nilpotent om  $L$  är nilpotent, men att det omvända inte alltid gäller. (2 p)

8. En *derivation* på  $\mathbb{C}[x]$  med avseende på ett komplext tal  $a$  är en linjär avbildning

$$D: \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}$$

som uppfyller

$$D(f(x)g(x)) = g(a)D(f(x)) + f(a)D(g(x)),$$

för alla  $f(x)$  och  $g(x)$  i  $\mathbb{C}[x]$ .

(a) Visa att mängden av derivationer på  $\mathbb{C}[x]$  med avseende på  $a$  bildar ett vektorrum  $\text{Der}_a(\mathbb{C}[x])$ . (1 p)

(b) Bestäm dimensionen av  $\text{Der}_a(\mathbb{C}[x])$ , exempelvis genom att använda hur derivationerna verkar på en lämpligt vald bas för  $\mathbb{C}[x]$ . (3 p)

9. Visa att  $\det A \geq 0$  för alla reella antisymmetriska matriser  $A$ . (4 p)
-