



**Lösningsförslag till tentamen
11 januari 2023**

DEL I – GRUNDLÄGGANDE PROBLEM

1. Låt $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 4}$ vara vektorrummet av polynom av grad ≤ 4 . Låt $L: V \rightarrow V$ vara operatör $I - \left(\frac{d}{dx}\right)^2$, dvs den som ges av $L(p)(x) = p(x) - p''(x)$. Bestäm Jordans normalform för L . **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi observerar att $L - I$ är nilpotent så alla egenvärden är 1. Vidare är

$$\ker(L - I) = \text{Span}\{1, x\}$$

$$\ker(L - I)^2 = \text{Span}\{1, x, x^2, x^3\}$$

$$\ker(L - I)^3 = \text{Span}\{1, x, x^2, x^3, x^4\} = V$$

eftersom kärnan till $\left(\frac{d}{dx}\right)^r$ är alla polynom av grad $< r$.

Detta betyder att det finns två Jordanblock med egenvärde 1 (egenvektorer 1 och x) varav båda med storlek ≥ 2 eftersom $\dim(\ker(L - I)^2) - \dim(\ker(L - I)) = 2$. Det ena av dessa block måste då ha storlek 3 vilket också stämmer med att $\dim(\ker(L - I)^3) - \dim(\ker(L - I)^2) = 1$. Alltså är Jordans normalform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alternativt kan man först välja en bas och skriva ner operatorns matris för denna bas. I basen $1, x, x^2, x^3, x^4$ får vi matrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

och man kan sedan beräkna JNF från denna som ovan.

Svar. Jordans normalform har två block med egenvärde 1 av storlek 2 och 3.

2. Låt V vara vektorrummet av kontinuerliga funktioner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ med kompakt stöd, dvs $f(x) = 0$ för alla $|x| > R$ för något R (beroende på f). Ge V den inre produkten $\langle f|g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}g(x)e^x dx$. Låt $L: V \rightarrow V$ vara operatör som ges av $L(f)(x) = f(x+1)$.
- (a) Bestäm den adjungerade operatören till L . (2 p)
- (b) Avgör för varje $c \in \mathbb{C}$ om cL är självdjungerad. (1 p)
- (c) Avgör för varje $c \in \mathbb{C}$ om cL är unitär. (1 p)

Lösningsförslag.

(a) Vi har att

$$\begin{aligned} \langle f|L(g) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}g(x+1)e^x dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x-1)}g(x)e^{x-1} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e} \overline{f(x-1)}g(x)e^x dx = \langle L^\dagger(f)|g \rangle \end{aligned}$$

Alltså är $L^\dagger(f)(x) = \frac{1}{e}f(x-1)$.

- (b) Vi har att $(cL)^\dagger = \bar{c}L^\dagger$. För att cL ska vara självdjungerad ska alltså $cf(x+1) = \frac{\bar{c}}{e}f(x-1)$ gälla för alla f i V . Detta gäller bara om $c = 0$.
- (c) Vi har att $(cL)^{-1}(f)(x) = \frac{1}{c}f(x-1)$. För att cL ska vara unitär, dvs $(cL)^{-1} = (cL)^\dagger$, ska alltså $\frac{1}{c}f(x-1) = \frac{\bar{c}}{e}f(x-1)$ gälla för alla f i V . Detta gäller precis när $e = |c|^2$, dvs då $|c| = \sqrt{e} = e^{1/2}$. Observera att detta inte bara är $\pm\sqrt{e}$ utan alla komplexa tal på cirkeln i origo med radie $\sqrt{e}$ eller explicit: $c = e^{1/2+i\omega} = \sqrt{e}(\cos \omega + i \sin \omega)$.

Svar.

- (a) $L^\dagger(f)(x) = \frac{1}{e}f(x-1)$.
- (b) Självdjungerad om $c = 0$.
- (c) Unitär om $|c| = \sqrt{e}$.

3. Låt $V = \mathbb{R}^3$ och låt $f: V \times V \rightarrow V$ vara kryssprodukten, dvs $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Eftersom f är bilinjär så ger den upphov till en unik linjär avbildning $L: V \otimes V \rightarrow V$ så att $L(\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ för alla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Bestäm en bas för $\ker L$.

(4 p)

Lösningsförslag. Vi har basen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ för V och basen $\{\mathbf{e}_{11}, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_{22}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{32}, \mathbf{e}_{33}\}$ för $V \otimes V$ där $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Vidare är

$$L(\mathbf{e}_{ij}) = L(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$$

och

$$L(\mathbf{e}_{11}) = L(\mathbf{e}_{22}) = L(\mathbf{e}_{33}) = 0$$

$$L(\mathbf{e}_{12}) = \mathbf{e}_3, \quad L(\mathbf{e}_{21}) = -\mathbf{e}_3$$

$$L(\mathbf{e}_{23}) = \mathbf{e}_1, \quad L(\mathbf{e}_{32}) = -\mathbf{e}_1$$

$$L(\mathbf{e}_{31}) = \mathbf{e}_2, \quad L(\mathbf{e}_{13}) = -\mathbf{e}_2.$$

Detta ger följande matris för L

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att matrisen har full rang (dvs 3) och därmed har kärnan dimension 6. Matrisen är redan rad-reducerad och en bas för kärnan är alltså

$$\{\mathbf{e}_{11}, \mathbf{e}_{22}, \mathbf{e}_{33}, \mathbf{e}_{23} + \mathbf{e}_{32}, \mathbf{e}_{13} + \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{12} + \mathbf{e}_{21}\}.$$

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Låt V vara ett vektorrum och låt U och W vara delrum av V .
- (a) Definiera vad det innebär att V är en *inre direkt summa* av U och W . (1 p)
 - (b) Definiera *kvotrummet* V/W (du behöver inte bevisa att det är ett vektorrum). (1 p)
 - (c) Visa att om $V = U \oplus W$ så finns en isomorfi mellan U och V/W . (2 p)

Lösningsförslag.

- (a) Att $V = U \oplus W$ innebär att varje vektor i V på ett *unikt* sätt går att skriva som en summa av en vektor i U och en vektor i W . Alternativt att U och W tillsammans spänner upp V och att $U \cap W = \{0\}$.
- (b) Kvotrummet V/W är mängden $\{[v] : v \in V\}$ där $[v] = v + W \subseteq V$ betecknar en *ekvivalensklass* (även kallat sidoklass). Nollvektorn är $[0] = 0 + W = W$. Addition ges av $[v_1] + [v_2] = [v_1 + v_2]$. Skalärmultiplikation ges av $c[v] = [cv]$. Detta gör kvotrummet till ett vektorrum.
- (c) Vi betraktar den linjära avbildningen $L: U \rightarrow V/W$ där $L(u) = [u]$ för alla $u \in U$. Eftersom varje vektor v går att skriva som $v = u + w$ med $u \in U$ och $w \in W$ har vi att $[v] = [u] + [w] = [u] = L(u)$ så L är surjektiv. Att $L(u) = [u]$ är noll innebär att $u + W = W$, dvs att $u \in W$. Men $u \in U$ och $U \cap W = \{0\}$. Alltså är L injektiv.

5. Låt V vara ett komplext inre produktrum och låt $L: V \rightarrow V$ vara en operator.
- (a) Definiera vad det innebär att L är *unitär*. (1 p)
 - (b) Ge ett exempel på ett inre produktrum V och en linjär operator L så att $\|L(x)\| = \|x\|$ utan att L är unitär. (1 p)
 - (c) Visa att alla egenvärden till en unitär operator har absolutbelopp 1. (1 p)
 - (d) Visa att egenrummen till olika egenvärden till en unitär operator är ortogonala. (1 p)

Lösningsförslag.

- (a) L är unitär om $L^{-1} = L^\dagger$. Ekvivalent, så är L unitär om L är inverterbar och bevarar norm (eller, ekvivalent, den inre produkten).
- (b) Låt $V = \ell^2(\mathbb{C})$ och $L(a_0, a_1, a_2, \dots) = (0, a_0, a_1, a_2, \dots)$. Då bevarar L normen men är inte inverterbar (den är inte surjektiv) och alltså inte unitär.
- (c) Låt ξ vara en egenvektor med egenvärde λ . Då är

$$\|\xi\|^2 = \langle \xi | \xi \rangle = \langle L(\xi) | L(\xi) \rangle = \langle \lambda \xi | \lambda \xi \rangle = \bar{\lambda} \lambda \langle \xi | \xi \rangle = |\lambda|^2 \|\xi\|^2$$

Eftersom $\|\xi\|^2 \neq 0$ följer att $|\lambda| = 1$.

- (d) Låt $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vara egenvärden och låt $\xi_i \in E_{\lambda_i}$ för $i = 1, 2$ vara egenvektorer. Då är

$$\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle = \langle L(\xi_1) | L(\xi_2) \rangle = \langle \lambda_1 \xi_1 | \lambda_2 \xi_2 \rangle = \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \langle \xi_1 | \xi_2 \rangle.$$

Eftersom $\bar{\lambda}_1 \lambda_1 = |\lambda_1|^2 = 1$ enligt (c) så är $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1^{-1}$. Eftersom $\lambda_1 \neq \lambda_2$ så är alltså $\bar{\lambda}_1 \lambda_2 \neq 1$. Det följer att $\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle = 0$, dvs ξ_1 och ξ_2 är ortogonala.

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. Låt A vara 3×3 -matrisen med element i kroppen $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ som ges av:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Låt S vara delrummet av 3×3 -matriser som ges av $S = \{p(A) : p(x) \in \mathbb{F}_3[x]\}$, dvs alla polynom i A med koefficienter i $\mathbb{F}_3$.

- (a) Bestäm antalet element i S . (2 p)
- (b) Avgör om S utgör en kropp (med addition och multiplikation av matriser). (2 p)

Lösningsförslag. Det räcker att bestämma minimalpolynomet till A . Detta är inte av grad 1 eftersom A inte är diagonal. Minimalpolynomet har alltså grad 2 eller 3. Vi beräknar:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = I.$$

Alltså är $A^2 - I = 0$ och minimalpolynomet är $q_A(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

- (a) Eftersom minimalpolynomet har grad 2 så är $S = \text{Span}\{I, A\}$ och alltså är S ett $\mathbb{F}_3$ -vektorrum av dimension 2. Detta innebär att S har 3^2 element.
- (b) Eftersom minimalpolynomet inte är irreducibelt så är S ej en kropp. Man kan också se detta konkret: $(A + I)(A - I) = 0$ så $A + I$ kan ej ha en invers.

Svar.

- (a) S har 9 element.
- (b) Nej, S är ej en kropp.

7. Låt $\ell^2(\mathbb{C})$ vara Hilbertrummet av följder $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ med $\|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$ och den inre produkten $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{a_i} b_i$. Låt $L: \ell^2(\mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{C})$ vara operatoren som tar en följd $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ på följden $(a_2, a_0, a_1, a_5, a_3, a_4, a_8, a_6, a_7, \dots)$.

- (a) Avgör om L är självadjungerad och/eller unitär. **(2 p)**
 (b) Avgör om det finns en ortonormal Hilbert-bas av egenvektorer till L . **(2 p)**

Lösningsförslag. Låt $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vara definierad av $\sigma(3k) = 3k + 1$, $\sigma(3k + 1) = 3k + 2$, $\sigma(3k + 2) = 3k$ för alla $k \in \mathbb{N}$. Då är $L(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{\sigma(i)}$. Notera att σ är inverterbar.

- (a) L är unitär eftersom den permuterar den ortonormala basen $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots$ och därför bevarar norm och är inverterbar (inversen ges av $L^{-1}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{\sigma^{-1}(i)}$). Alltså är $L^\dagger = L^{-1}$. Eftersom $L \neq L^{-1}$ så är L inte självadjungerad. Tex är $L(\mathbf{e}_0) = \mathbf{e}_1$ medan $L^{-1}(\mathbf{e}_0) = \mathbf{e}_2$.
 (b) Eftersom V är oändligdimensionellt så följer det inte automatiskt att L är diagonaliserbar från att L är unitär. Men vi noterar att $L^3 = I$ så alla egenvärden är tredje enhetsrötter. Vidare är

- $\mathbf{e}_{3k} + \mathbf{e}_{3k+1} + \mathbf{e}_{3k+2}$ en egenvektor med egenvärde 1,
- $\mathbf{e}_{3k} + \omega \mathbf{e}_{3k+1} + \omega^2 \mathbf{e}_{3k+2}$ en egenvektor med egenvärde ω , och
- $\mathbf{e}_{3k} + \omega^2 \mathbf{e}_{3k+1} + \omega \mathbf{e}_{3k+2}$ en egenvektor med egenvärde ω^2 ,

för alla $k = 0, 1, 2, \dots$ där $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ är en tredje enhetsrot. Detta är en ortogonal bas för hela $\ell^2(\mathbb{C})$ vilket vi kan se på följande sätt. (1) Egenvektorer för olika k är uppenbart ortogonala. (2) Egenvektorer för samma k har olika egenvärden och är därför ortogonala eftersom L är unitär. (3) För varje k har vi alltså tre linjärt oberoende egenvektorer och dessa spänner därför upp $\mathbf{e}_{3k}, \mathbf{e}_{3k+1}, \mathbf{e}_{3k+2}$.

Vi kan slutligen normalisera egenvektorbasen genom att dela med $\sqrt{3}$.

Svar.

- (a) L är unitär men inte självadjungerad.
 (b) Ja, L är ortogonalt diagonaliserbar.

8. Låt X och Y vara $n \times n$ -matriser så att alla trippelprodukter av dem är noll, dvs $X^3 = X^2Y = XYX = YX^2 = Y^2X = YXY = XY^2 = Y^3 = 0$.

(a) Beräkna e^Xe^Y och e^{X+Y} . (1 p)

(b) Visa att det finns en matris Z så att $e^Xe^Y = e^Z$ och ge en explicit formel för Z i termer av X och Y . (3 p)

Lösningsförslag.

(a) I allmänhet är

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Eftersom $X^3 = 0$, $Y^3 = 0$ och $(X + Y)^3 = 0$ har vi att

$$e^X = I + X + \frac{X^2}{2}$$

$$e^Y = I + Y + \frac{Y^2}{2}$$

$$e^{X+Y} = I + X + Y + \frac{X^2 + XY + YX + Y^2}{2}.$$

Vi beräknar:

$$e^Xe^Y = \left(I + X + \frac{X^2}{2}\right) \left(I + Y + \frac{Y^2}{2}\right) = I + X + Y + XY + \frac{X^2 + Y^2}{2}.$$

(b) Vi gör ansatsen $Z = X + Y + aXY + bYX$ eftersom alla trippelprodukter är noll och den linjära termen i e^Xe^Y är $X + Y$. Vi har att

$$\begin{aligned} e^Z &= I + X + Y + aXY + bYX + \frac{X^2 + Y^2 + XY + YX}{2} \\ &= I + X + Y + \frac{2a+1}{2}XY + \frac{2b+1}{2}YX + \frac{X^2 + Y^2}{2} \end{aligned}$$

Vi måste alltså välja $a = \frac{1}{2}$ och $b = \frac{-1}{2}$. Dvs

$$Z = X + Y + \frac{1}{2}(XY - YX) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y].$$

Hade vi tagit med $cX^2 + dY^2$ i ansatsen för Z hade vi fått $c = d = 0$.

Alternativt kan vi istället använda att $\ln(I + A) = A - \frac{1}{2}A^2$ för en matris A så att $A^3 = 0$. Med $A = X + Y + XY + \frac{X^2+Y^2}{2}$ ger detta:

$$\begin{aligned} Z &= \ln(e^Xe^Y) = \ln(I + A) = A - \frac{1}{2}A^2 \\ &= X + Y + XY + \frac{X^2 + Y^2}{2} - \frac{1}{2}(X^2 + XY + YX + Y^2) \\ &= X + Y + \frac{1}{2}(XY - YX). \end{aligned}$$

Svar.

$$\begin{aligned} e^Xe^Y &= I + X + Y + XY + \frac{X^2 + Y^2}{2} \\ e^{X+Y} &= I + X + Y + \frac{XY + YX}{2} + \frac{X^2 + Y^2}{2} \\ Z &= X + Y + \frac{1}{2}(XY - YX) \end{aligned}$$

9. Låt V vara ett vektorrum av dimension n , låt $0 < m < n$ och låt $\omega \in \bigwedge^m V$ där $\omega \neq \mathbf{0}$. Vi har en linjär avbildning $L: V \rightarrow \bigwedge^{m+1} V$ där $L(\mathbf{y}) = \omega \wedge \mathbf{y}$. Visa att $\dim(\ker L) = m$ om och endast om $\omega = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_m$ för några vektorer $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m \in V$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Om $\omega = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_m$ så är $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ linjärt oberoende eftersom $\omega \neq \mathbf{0}$. Eftersom $\omega \wedge \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ för $1 \leq i \leq m$ så har vi att $\text{Span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\} \subseteq \ker L$ och alltså $\dim(\ker L) \geq m$. Utökar vi till en bas $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ för V så ser vi att $L(\mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_m \wedge \mathbf{x}_j$ för $m+1 \leq j \leq n$ är en del av basen för $\bigwedge^{m+1} V$ och alltså linjärt oberoende. Alltså är $\text{rk}(L) \geq n - m$ och det följer av dimensionssatsen att $\dim(\ker L) = n - (n - m) = m$.

Omvänt, om $\dim(\ker L) = m$ så välj en bas $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ för kärnan. Utöka till en bas $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ för V . En bas för $\bigwedge^m V$ är $\{\mathbf{x}_S\}_S$ där $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ är en delmängd av storlek m och $\mathbf{x}_S = \mathbf{x}_{s_1} \wedge \mathbf{x}_{s_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_{s_m}$ där $s_1 < s_2 < \cdots < s_m$. Vi kan alltså skriva $\omega = \sum_S a_S \mathbf{x}_S$ för några skalärer a_S .

Låt $1 \leq i \leq n$. Då är $\mathbf{x}_S \wedge \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ om $i \in S$ och $\mathbf{x}_S \wedge \mathbf{x}_i = \pm \mathbf{x}_{S \cup \{i\}}$ om $i \notin S$ (där tecknet beror på antalet byten som behöver göras för att ordna $\{s_1, s_2, \dots, s_m, i\}$). Vi noterar att om $i \notin S_1, S_2$ så är $S_1 \cup \{i\} = S_2 \cup \{i\}$ om och endast om $S_1 = S_2$. Alltså är:

$$L(\mathbf{x}_i) = \omega \wedge \mathbf{x}_i = \sum_{S: i \notin S} \pm a_S \mathbf{x}_{S \cup \{i\}}$$

en linjärkombination av distinkta basvektorer $\mathbf{x}_{S \cup \{i\}}$. Men vi vet att $L(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$ om $1 \leq i \leq m$. Alltså måste $a_S = 0$ om $i \notin S$ för något $1 \leq i \leq m$, dvs $a_S = 0$ om inte $S = \{1, 2, \dots, m\}$. Detta ger att:

$$\omega = a(\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_m) = (a\mathbf{x}_1) \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_m.$$