



**SF1681 Linjär algebra, fk
Tentamen
10 januari 2018**

Skrivtid: 14:00-19:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng. Del I utgörs av de tre första uppgifterna som testar förmågan att lösa basala problem. Del II utgörs av de två följande uppgifterna och testar begreppsförståelse och kunskap om satser och samband. De fyra sista uppgifterna utgör del III och testar förmågan att lösa mer avancerade problem och är avsedda främst för högre betyg.

Bonuspoäng av typ I adderas till erhållna poäng på del I och bonuspoäng av typ II adderas till erhållna poäng på del II.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av följande tabell där kolumnerna anger poänggräns för respektive del.

Del	Poäng	Innehåll	Fx	E	D	C	B	A
I	12	Basala problem	7	8	8	8	8	8
II	8	Begrepp och satser	4	4	4	6	6	6
III	16	Avancerade problem	0	0	3	6	9	12

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL I – BASALA PROBLEM

1. Bestäm Jordans normalform för den operator på $\mathbb{C}^2$ som ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & i\sqrt{2} \\ 2i\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

2. Låt $V = \mathbb{C}[x]$ vara vektorrummet som ges av alla polynom i x med komplexa koefficienter och låt $W = \{p(x) \in V : p(1) = p(-1) = 0\}$.

(a) Bestäm en linjär avbildning $L: V \rightarrow U$ så att $W = \ker(L)$.

(1 p)

(b) Bestäm en bas för V/W .

(3 p)

3. Bestäm pseudoinversen till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

DEL II – BEGREPP OCH SATSER

4. Låt V vara ett komplext inre produktrum och L en operator på V .

(a) Hur definieras den *adjungerade operatoren* $L^\dagger$?

(1 p)

(b) Hur kan man visa att den adjungerade operatoren existerar då $\dim V < \infty$?

(1 p)

(c) Ge ett belysande exempel på ett inre produktrum V och en operator L som inte är självadjungerad, men där både L och $L^\dagger$ är naturliga operatorer.

(2 p)

5. (a) Vad är en *sannolikhetsmatris*?

(1 p)

(b) Alla sannolikhetsmatriser har 1 som ett egenvärde. Hur bevisar man det?

(1 p)

(c) Formulera någon version av Perron-Frobenius sats.

(1 p)

(d) Ge ett exempel som visar att $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ inte behöver existera även om A är en irreducibel sannolikhetsmatris.

(1 p)

DEL III – AVANCERADE PROBLEM

6. På Hilbertrummet $\ell_2(\mathbb{C}) = \{\{a_j\}_{j \geq 0} : a_j \in \mathbb{C}, \forall j \geq 0 \text{ och } \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 < \infty\}$ definierar vi en operator L genom $L(\{a_j\}_{j \geq 0}) = \{b_j\}_{j \geq 0}$ där

$$b_j = \begin{cases} -a_{j+1} & \text{om } j \text{ är jämnt,} \\ a_{j-1} & \text{om } j \text{ är udda.} \end{cases}$$

Kontrollera att $L(\{a_j\}_{j \geq 0})$ tillhör $\ell_2(\mathbb{C})$ om $\{a_j\}_{j \geq 0}$ gör det och bestäm alla egenvärden, egenvektorer och singularvärden till operatoren L . **(4 p)**

7. Låt $V \subseteq \mathbb{C}^3$ vara delrummet som ges av ekvationen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ och betrakta tensorprodukten $V \otimes V$ som ett delrum i $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$. Avgör om någon av tensorerna

$$e_1 \otimes e_3 + e_2 \otimes e_1 - 2e_3 \otimes e_2$$

eller

$$e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_3$$

ligger i $V \otimes V$, där e_1, e_2, e_3 är standardbasvektorer för $\mathbb{C}^3$. **(4 p)**

8. Låt K vara delmängden av $M_2(\mathbb{Z}_7)$ som ges av

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_7 \right\}.$$

Visa att K bildar en kropp med 49 element och lös ekvationerna $x^2 + 2x + 2 = 0$ respektive $x^6 = 1$ i K . **(4 p)**

9. Inom *grafteori* används *grannmatriser* och deras egenvärden. En *graf* är en mängd *hörn* och en mängd *kanter* som går mellan par av hörn. Grannmatrisen för en graf med hörn $\{1, 2, \dots, n\}$ är den symmetriska $n \times n$ -matris som ges av

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om det går en kant mellan hörnen } i \text{ och } j, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Betrakta cykelgrafen C_n med n hörn där det går en kant mellan hörn i och hörn $i + 1$ för $i = 1, 2, \dots, n - 1$, men också en kant mellan hörn 1 och hörn n . Bestäm egenvärdena för grannmatrisen för C_n . (Ledning: Matrisen kan skrivas som $B + B^T$ där $B^n = I$.) **(4 p)**